$$B(T) = \int_0^\infty B_\lambda(\lambda,T)\,d\lambda = \int_0^\infty B_\nu(\nu,T)\,d\nu$$

$$B(T) = \frac{2h}{c^2}\int_0^\infty \frac{\nu^3\,d\nu}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad x = \frac{h\nu}{kT}$$

$$B(T) = \frac{2h}{c^2}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x-1} = I = \frac{\pi^4}{15}$$

$$B(T) = \frac{2\pi^4}{15}\,\frac{k^4}{c^2h^3}\,T^4$$

$$M_B(T) = \pi\,B(T) = \frac{2\pi^5}{15}\,\frac{k^4}{c^2h^3}\,T^4$$

$M_B(T) = \sigma\,T^4$ loi de Stefan

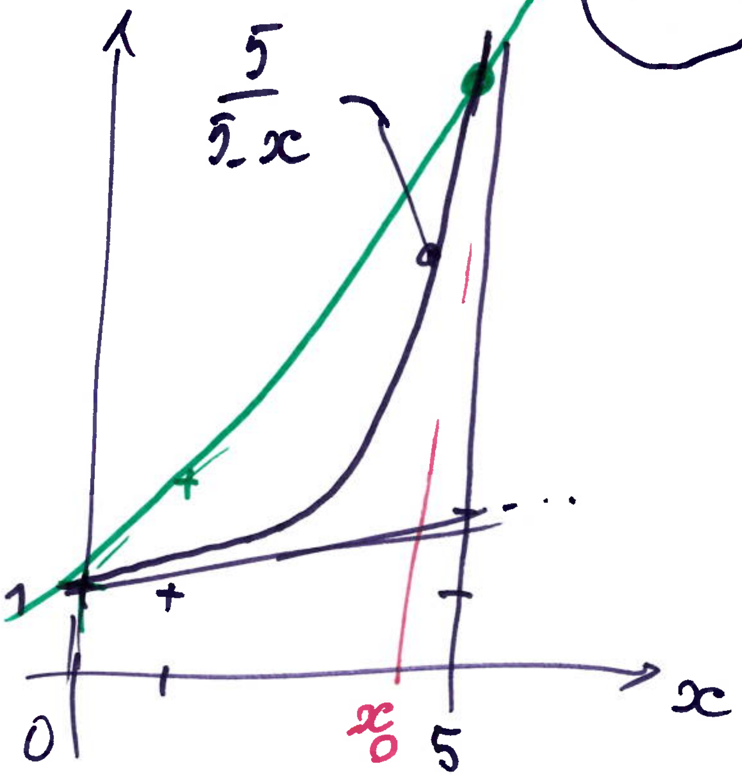
$$\sigma = \frac{2\pi^5}{15}\,\frac{k}{c^2}\times\left(\frac{k}{h}\right)^3 = 5{,}67\ 10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$$

(10) II.3 Déplacement du maximum en λ (Wien)

$$\frac{d\left(1/B\lambda\right)}{d\lambda}=0 \qquad 5\cancel{\lambda^4}(e^x-1)=\cancel{\lambda^5}e^x\,\frac{hc}{kT\lambda^{\cancel{2}}}\ x$$

$$5(e^x-1)=x\,e^x$$

$$e^x=\frac{5}{5-x}$$



$$x_0=4,965=\frac{C_2}{\lambda T_{max}}$$

$$\lambda_{max}T=\frac{C_2}{x_0}=\frac{14\,400\,\mu m\,K}{4,965}$$

$$\simeq\frac{14\,400}{5}\mu m\,K=2880\,\mu m.K$$

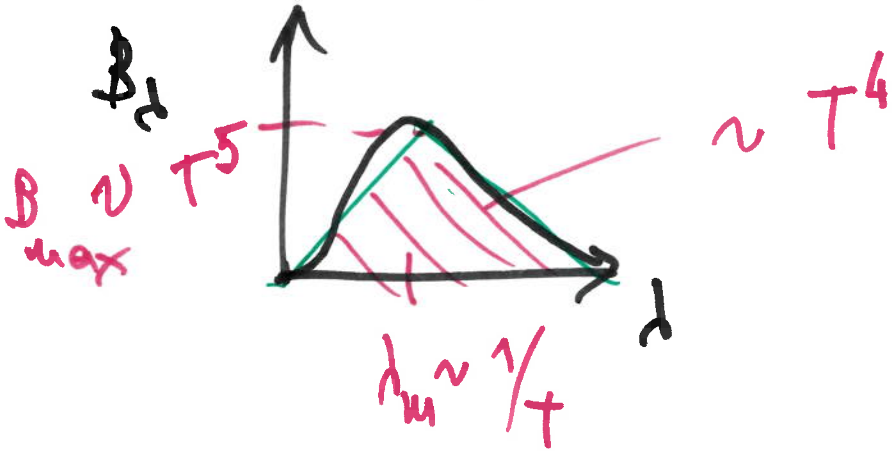
Wien

$$\boxed{\lambda_m T\simeq 2898\ \mu m.K}$$

$$\simeq 3000\ \mu m.K$$

(11) $B_\lambda(\lambda_{max}) = b\,T^5$

$\lambda_M \sim \frac{1}{T}$ $\quad B(\lambda_M) \sim T^5$ $\quad \int_0^{\infty} B_\lambda(\lambda,T)\,d\lambda \sim T^4$



Soleil $\quad T_S \simeq 6000\,K \quad \lambda_M^S = 0{,}5\,\mu m$

Terre $\quad T_T \simeq 300\,K \quad \lambda_M^T \simeq 10\,\mu m$

$$\frac{M_S}{M_T} = \left(\frac{T_S}{T_T}\right)^4$$

$$\frac{M_S}{M_T} = 20^4 = 16\,10^4 = 1{,}6\,10^5$$

$$\frac{B_S(\lambda_M^S)}{B_T(\lambda_M^T)} = 20^5 = 3{,}2\,10^6$$

(12) Maximum de B_ν (fréquence)

$$B_\nu(T) \sim \frac{\nu^3}{e^x - 1} \qquad \frac{dB_\nu}{d\nu} = 0 \qquad \frac{3\nu^{\cancel{2}}}{\cancel{(e^x-1)^2}} = \frac{\nu^{\cancel{3}}\, e^x}{(e^x-1)^{\cancel{2}}}\,\frac{h}{kT}$$

$$3(e^x - 1) = x\,e^x$$

$$e^x = \frac{3}{3-x} \Rightarrow x_1 = 2{,}82$$

$$\lambda'_{max}\, T = \frac{c_2}{x_1} = 5100\ \mu m\ K$$

<u>Exemple</u>

Soleil $\quad T_S \simeq 6000 K \quad \lambda'_{max} \simeq 0{,}9\ \mu m \quad$ <u>IR</u>

Terre $\quad T_T = 300\ K \quad \lambda'_{max} \simeq 18\ \mu m$

13

II.5 Formes asymptotiques de la loi de Planck

a) Courtes λ : loi de Wien

$\lambda T \ll \frac{hc}{k}$ $\quad h\nu \gg kT \quad x \gg 1 \quad e^x \gg 1$

$$B_\lambda(\lambda,T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{k\lambda T}}$$

$$B_\nu(\nu,T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

Ecart $< 1\%$ $\quad e^x > 100 \quad x > 4{,}6$

$$\lambda T < \frac{c_2}{\cancel{5}4{,}6} \simeq 3\,100\ \mu m.K$$

soit $\lambda < \lambda_m$ de Wien

(14)

b) Grandes λ (Rayleigh Jeans)

$\lambda T \gg \frac{hc}{k} \Rightarrow h\nu \ll kT \Rightarrow x \ll 1$

$e^x - 1 = x + \cancel{\frac{x^2}{2} + \cdots}$

$B_\lambda(\lambda, T) \simeq \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{k\lambda T}{hc}$

$B_\lambda(\lambda, T) \simeq 2k c \frac{T}{\lambda^4} \sim \frac{T}{\lambda^4}$ — Rayleigh

$B_\nu(\nu, T) \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu} = 2 \frac{kT}{c^2} \nu^2$

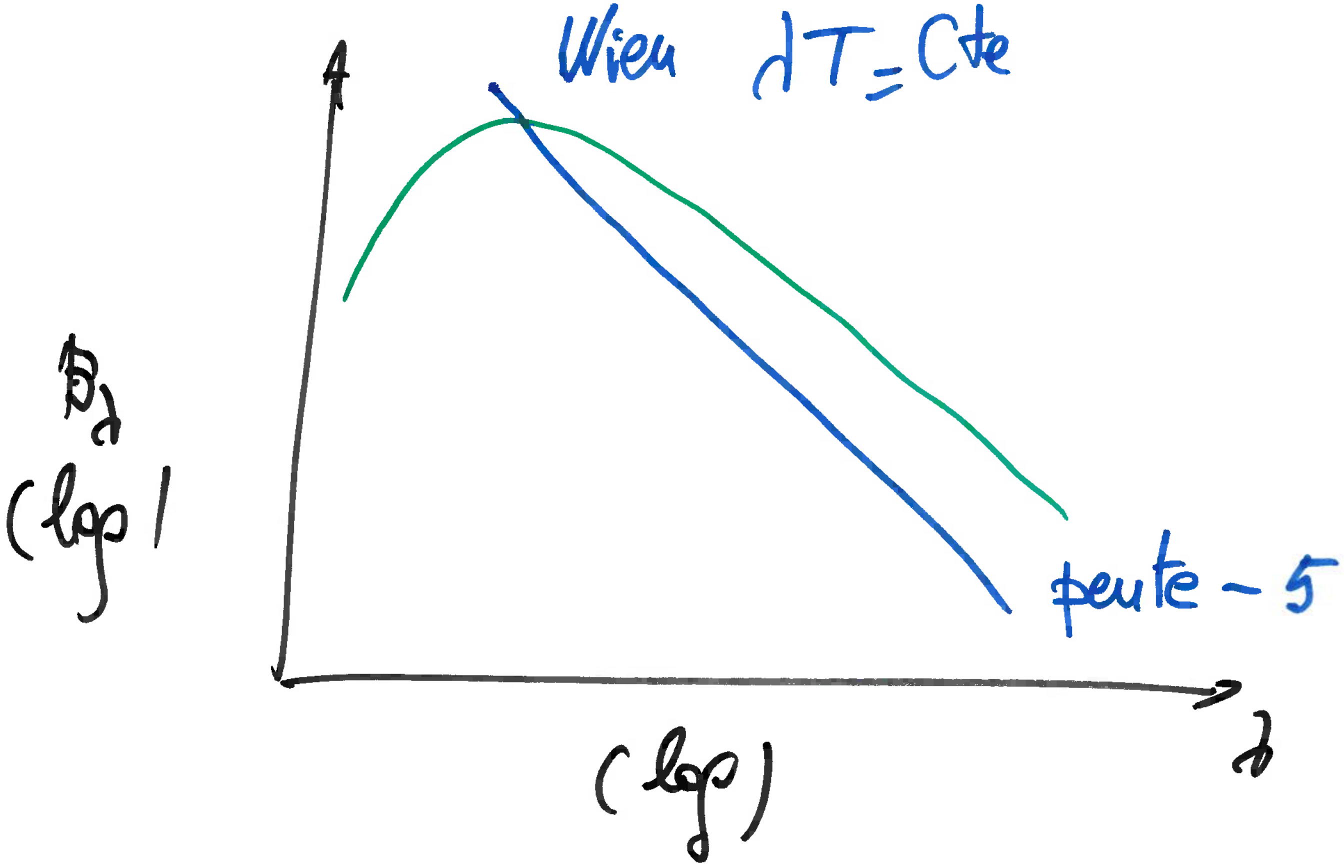
Ecart < 1%

$\left| \frac{e^x - 1 - x}{x} \right| < 0{,}01$

$x < 0{,}018$

$\lambda T > 0{,}8\ \text{m} \times \text{K} = 800\,000\ \mu\text{m}\cdot\text{K}$

Ex
Soleil $\lambda > 140\ \mu\text{m}$ IR lointain
Terre $\lambda > 2{,}8\ \text{mm}$ radio



Wien $\lambda_m \sim \frac{1}{T}$

$B_\lambda(\lambda_m, T) \sim T^5$

$$\Rightarrow (\lambda_m, B_\lambda(\lambda_m, T)) \sim \left(\frac{1}{T}, T^5\right)$$

16

II. 3 Temp. radiatives : comparer avec C.N.

a) température équivalente d'émission

$M = M_B(T_{\text{équivalente}})$ = celle du CN de même émittance

$T_{\text{équ}} \leq T_{\text{réelle}}$

b) à λ fixé, direction $\vec{\Omega}$ fixée

à partir des luminances spectrales $L_\lambda(\lambda, \vec{\Omega})$

$T_{\text{brillance}}(\lambda, \vec{\Omega})$ = celle que devrait prendre le CN pour donner la même luminance spectrale

(17) a) $M = M_B(T_{équiv}) = \sigma T_{équiv}^4$ $\quad T_{équi} = \sqrt[4]{\dfrac{M}{\sigma}}$

$\varepsilon = \dfrac{M}{M_B(T)}$ $\quad M = \varepsilon \sigma T_{réelle}^4$

globale

$T_{équiv} = \sqrt[4]{\varepsilon}\, T_{réelle} \leq T_{réelle}$

b) λ fixé, $\vec{\Omega}$ fixé

$L(\lambda, \vec{\Omega}) = B(\lambda, T_{brill}(\lambda, \vec{\Omega}))$

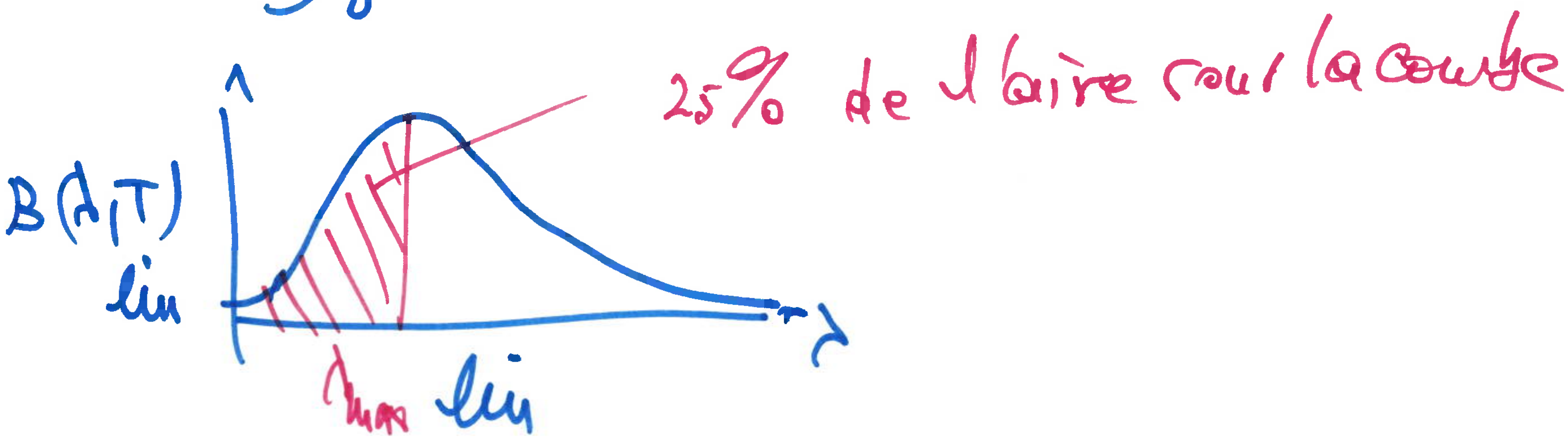
Approx grandes λ (Rayleigh-Jeans)

$L \sim T \Rightarrow T_{brill} \simeq \dfrac{\lambda^4 L_\lambda(\lambda, \vec{\Omega})}{2ck}$

(18) Table de l'intégrale de la loi de Planck

$$x = \frac{\lambda}{\lambda_{max}} \quad 0 \leq \frac{\int_0^{x\lambda_{max}} B_\lambda(\lambda, T)\, d\lambda}{\int_0^{\infty} B_\lambda(\lambda, T)\, d\lambda} \leq 1$$

$$\frac{\int_0^{\lambda_{max}} B(\lambda, T)\, d\lambda}{\int_0^{\infty} B(\lambda, T)\, d\lambda} = 0{,}25$$



(19) Remarque sur loi de Kirchhoff

$$\varepsilon(\lambda, \theta, \varphi) = \alpha(\lambda, \theta, \varphi) \quad \forall \lambda \ \forall \theta \ \forall \varphi$$

a) ε hémisphérique $\qquad \alpha$ hémisphérique $= fct(\lambda)$

$\Rightarrow$ intégrer sur les directions $\Rightarrow$

déf ε et α à partir des émittances et éclairements spectraux

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{M_B(\lambda, T)} = \frac{\iint_{\Omega=2\pi} L(\lambda, \vec{\Omega}) \cos\theta \, d^2\Omega}{\iint_{\Omega=2\pi} B(\lambda, \vec{\Omega}) \cos\theta \, d^2\Omega}$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\langle \ \rangle}{\langle \ \rangle} \neq \langle \varepsilon(\lambda, \vec{\Omega}) \rangle$$

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\iint \varepsilon(\lambda, \vec{\Omega}) \, B(\lambda, \cancel{\vec{\Omega}}) \cos\theta \, d^2\Omega}{\iint B(\lambda, \cancel{\vec{\Omega}}) \cos\theta \, d^2\Omega} = \frac{\iint \varepsilon(\lambda, \vec{\Omega}) \cos\theta \, d^2\Omega}{\underbrace{\int \cos\theta \, d^2\Omega}_{\pi}}$$

(30)

$$\rho(\lambda) = \frac{\iint_{2\pi} \rho(\lambda, \vec{\Omega}) \, L'(\lambda, \vec{\Omega}') \cos\theta' \, d^2\Omega'}{\iint_{2\pi} L'(\lambda, \vec{\Omega}') \cos\theta' \, d^2\Omega'}$$

L' luminance spectrale incidente

$\Rightarrow$ dépend de $\vec{\Omega}'$

$\rho(\lambda) \neq \varepsilon(\lambda)$ hémisphériques

Sauf : * surface diffuse $\varepsilon(\lambda, \vec{\Omega})$ indpt de $\vec{\Omega}$

$\rho(\lambda, \vec{\Omega})$ indpt de $\vec{\Omega}$

* flux spectral incident indpt de $\vec{\Omega}$

lambertien

(2°1) b)

ε et k globaux après intégration spectrale

$$\varepsilon = \frac{M}{M_B} = \frac{\int \varepsilon(\lambda) M_B(\lambda) d\lambda}{\int M_B(\lambda) d\lambda}$$

$$k = \frac{E'_{abs}}{E'_{incident}} = \frac{\int k(\lambda) E'(\lambda) d\lambda}{\int E'(\lambda) d\lambda}$$

pondération de $\varepsilon(\lambda)$ émittance du CN

$k(\lambda)$ éclairement spectral

$\varepsilon \neq k$

Cond d'égalité

- corps gris $\varepsilon(\lambda) = k(\lambda)$ indpt de λ
- $\frac{E'(\lambda)}{M_B(\lambda)}$ indpt de λ éclairement = celui d'un corps gris à même T