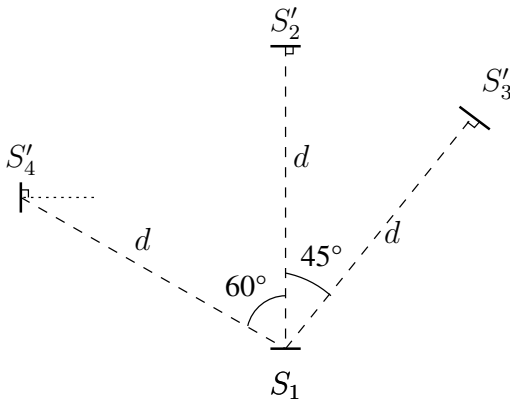


TD de rayonnement avec quelques éléments de correction

TD 1 : GRANDEURS ÉNERGÉTIQUES

1 Puissance reçue par une surface élémentaire



On considère une source plane de *petite* surface S_1 , d'aire 1 cm^2 émettant de façon *lambertienne* sur une de ses faces une puissance $P_1 = 2 \text{ W}$. On se propose de calculer les puissances reçues P'_2 , P'_3 et P'_4 respectivement par trois *petites* surfaces planes S'_2 , S'_3 et S'_4 de même aire que S_1 , distantes de $d = 0,5 \text{ m}$ de la surface émettrice, et disposées suivant la figure 1. Compte tenu des petites dimensions des surfaces devant la distance d , on considèrera que l'angle solide sous lequel une surface est vue par un point quelconque de l'autre surface ne dépend pas du point d'observation.

FIGURE 1 – Géométrie vue en projection

2 Émittance et luminance du Soleil

La constante solaire terrestre C représente l'éclairement produit par le Soleil sur une surface plane placée au sommet de l'atmosphère terrestre, perpendiculairement au rayonnement solaire. Calculer la puissance totale reçue par la Terre. Calculer l'intensité, la luminance et l'émittance énergétiques solaires sachant que le Soleil rayonne selon la loi de Lambert.

Données : distance Terre-Soleil $D = 1,5 \times 10^{11} \text{ m} = 1 \text{ ua}$ (unité astronomique) ; $C = 1361 \text{ W m}^{-2}$; diamètre apparent du soleil vu depuis la Terre : $2\alpha = 32'$.

$$I = CD^2 \approx 3,1 \times 10^{25} \text{ W sr}^{-1} ; L = C/\pi\alpha^2 \approx 2,0 \times 10^7 \text{ W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} ; M = C/\alpha^2 \approx 6,35 \times 10^7 \text{ W m}^{-2}.$$

3 Luminance d'une source plane isotrope dans un cône

Une source lumineuse plane placée en A , de très petites dimensions ($S = 6 \text{ cm}^2$) émet une puissance P de 10 W dans le cône de révolution de demi-angle au sommet $\alpha = 15^\circ$ et d'axe normal à S .

1. Calculer l'émittance M de la source, puis sa luminance énergétique L , supposée constante dans le cône. Comparer L à la luminance d'une source lambertienne de même puissance.

L'émittance de la source est donnée par $M = P/S \approx 16,7 \text{ kWm}^{-2}$. On peut aussi l'exprimer en fonction de sa luminance L supposée constante dans le cône d'émission :

$$M = 2\pi \int_{\theta=0}^{\alpha} L \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \pi L \int_{\theta=0}^{\alpha} d(\sin^2 \theta) = \pi L \sin^2 \alpha \quad (1)$$

On en déduit

$$L = \frac{M}{\pi \sin^2 \alpha} = \frac{L_0}{\sin^2 \alpha} \approx 79 \text{ kWm}^{-2} \text{sr}^{-1} \quad (2)$$

où L_0 serait la luminance d'une source plane lambertienne de même puissance et de même surface. Cela montre comment la luminance se concentre en fonction de α dans le cône.

2. La source éclaire un écran perpendiculaire à l'axe du cône, situé à la distance $D = AH = 1 \text{ m}$. Calculer l'éclairement E' au point M de l'écran situé à la distance r de la projection H du point A sur l'écran tel que $\beta = (\overline{AM}, \overline{AH}) = 10^\circ$. On supposera que la distance source-écran est suffisamment grande devant les dimensions de la source pour que l'angle d'émergence soit indépendant du point de la source considéré.

$$E' = \frac{d^2\Phi'}{d^2S'} \quad \text{où } d^2\Phi' \text{ est le flux reçu par la surface } d^2S' \text{ sur le plan}$$

$d^2\Phi = L d^2U = L\Omega' d^2\Sigma'$ où Ω' est l'angle solide sous lequel un point quelconque de la surface d^2S' voit la source, avec $d^2\Sigma' = d^2S' \cos \theta'$ et $\Omega' = \Sigma/AM^2 = S \cos \theta/AM^2$.

Les plans de la source et de l'écran étant parallèles, angle d'émergence θ et angle d'incidence θ' sont égaux à β . Comme $AM = AH/\cos \beta$, $d^2U = S d^2S' \cos^4 \beta/D^2$, l'éclairement s'écrit :

$$E'(\beta) = LS \cos^4 \beta/D^2 = E'(0) \cos^4 \beta$$

Pour $\beta = 10^\circ$, on obtient $E' \approx 44,7 \text{ Wm}^{-2}$.

La puissance 4 en $\cos \beta$ provient :

- de la projection de la surface émettrice perpendiculairement à la direction d'émission
- de la projection de la surface réceptrice perpendiculairement à la direction d'émission
- de la dépendance de la distance AM en fonction de β (puissance 2).

Si la source était sphérique, sa projection perpendiculairement à la direction d'émission serait de surface constante, et l'éclairement sur le plan varierait en $\cos^3 \beta$.

3. Vérifier en intégrant sur le disque éclairé qu'il intercepte la puissance totale émise.

L'éclairement est constant sur un cercle de rayon r centré sur le point H . La puissance totale interceptée P' est obtenue en intégrant le flux sur le disque éclairé de rayon $R = D \tan \alpha$. On le découpe en couronnes concentriques de largeur dr et de surface $2\pi r dr$.

$$P' = \int_{r=0}^R 2\pi r E'(r) dr = 2\pi E'(0) \int_{r=0}^R r \cos^4 \beta dr$$

Or $\cos^2 \beta = \frac{1}{1+\tan^2 \beta} = \frac{D^2}{r^2+D^2}$, donc

$$P' = 2\pi E'(0) \int_{r=0}^R \left(\frac{D^2}{r^2+D^2} \right)^2 r dr = \pi E'(0) D^2 \int_{s=0}^{(R/D)^2} \frac{ds}{(1+s)^2} = \pi E'(0) D^2 \left[\frac{-1}{1+s} \right]_0^{(D/R)^2}$$

$$P' = \pi E'(0) D^2 \frac{R^2}{D^2 + R^2} = \pi E'(0) D^2 \sin^2 \alpha = \pi LS \sin^2 \alpha \quad \text{or} \quad L = \frac{P}{\pi S \sin^2 \alpha} \quad \text{donc} \quad P' = P$$

TD 2 RAYONNEMENT DU CORPS NOIR

1 Répartition spectrale du rayonnement solaire émis

1.1 À l'aide des tables du corps noir distribuées, tracer l'allure de la répartition cumulée (normalisée) de la puissance rayonnée par un corps noir

$$\frac{1}{\int_0^\infty B_\lambda(\lambda, T) d\lambda} \int_0^\lambda B_\lambda(\lambda, T) d\lambda$$

en fonction de la longueur d'onde normalisée λ/λ_m où λ_m est la longueur d'onde du maximum de B_λ à la température T . Déterminer en particulier le pourcentage de puissance rayonnée de part et d'autre de λ_m .

1.2 Considérant que le soleil émet comme un corps noir à $T_S \approx 5800 \text{ K}$, déterminer quelles fractions d'énergie il rayonne dans les domaines :

- $\lambda \leq 0,4 \mu\text{m}$: Ultra-violet
- $0,4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 0,7 \mu\text{m}$: Visible
- $0,7 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 2 \mu\text{m}$: Proche infra-rouge
- $\lambda \geq 2 \mu\text{m}$: Infra-rouge lointain

2 Séparation spectrale entre flux solaire et flux tellurique

On présente traditionnellement les flux solaire et tellurique comme localisés dans des domaines spectraux disjoints. En fait, assimilés à des corps noirs, Soleil et Terre émettent dans tout le spectre et on définit leur domaine spectral respectif par le fait que l'un domine l'autre *au niveau de la surface de la planète*. Nous nous proposons de déterminer la longueur d'onde λ^* pour laquelle, dans le bilan énergétique global de l'ensemble terre-atmosphère, les densités spectrales des deux flux sont égales.

- 2.1 Déterminer l'éclairement spectral solaire $E(\lambda)$ (en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{m}^{-1}$) par unité de surface perpendiculaire au flux solaire, puis l'éclairement spectral solaire *moyen* $E'(\lambda)$ par unité de surface *de la Terre*, en fonction de la luminance spectrale $B_{T_S}(\lambda)$ du corps noir à la température T_S .
- 2.2 En déduire la densité spectrale du flux solaire absorbé $\Phi_{\text{abs}}(\lambda)$ en moyenne à la surface de la planète.
- 2.3 Caractériser la longueur d'onde λ^* pour laquelle flux solaire absorbé et émittance du flux tellurique ont la même densité spectrale¹.
- 2.4 À l'aide des deux courbes (en échelles log-log) de luminance spectrale du corps noir fournies en annexe (corps noir solaire sur papier et corps noir planétaire sur transparent), rechercher graphiquement la longueur d'onde λ^* .
- 2.5 Vérifier en calculant les densités spectrales solaire absorbée et tellurique émise vers l'espace à la longueur d'onde λ^* estimée graphiquement.
- 2.6 Quels sont les pourcentages de rayonnement solaire au delà de λ^* et de rayonnement tellurique en deçà ?

Données :

distance Terre-Soleil	$D = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$
rayon du Soleil	$R_S = 6,9 \times 10^8 \text{ m}$
albedo de la planète Terre	$a = 0,3$ (supposé indépendant de λ)
constante de Planck	$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
constante de Boltzmann	$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
vitesse de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
température du Soleil	$T_S \approx 5800 \text{ K}$
température de l'ensemble terre-atmosphère	$T_T \approx 255 \text{ K}$

Luminance spectrale du corps noir à la température T :

$$B_T(\lambda) = \frac{dB_T}{d\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1 \right]} \quad (\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \text{ m}^{-1})$$

3 Températures radiatives de la terre

- 3.1 Calculer la température équivalente de rayonnement de la planète Terre, à partir de son émittance énergétique totale M .
- 3.2 Pour les nombres d'onde ν' donnés ci-dessous, déterminer les températures de brillance de la Terre à partir de la luminance monochromatique $L_{\nu'} = \frac{dL}{d\nu'}$. De quels domaines d'altitude sont-elles représentatives ? Expliquer en tenant compte de la transmission atmosphérique à ces longueurs d'onde.

Données : $M \approx 240 \text{ W m}^{-2}$;

ν'	(cm^{-1})	700	900
$L_{\nu'}$	($\text{W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} / \text{cm}^{-1}$)	0,03	0,09

1. Ne pas tenter une résolution analytique pour obtenir λ^* .

TD 3 BILAN RADIATIF

1 Surface en équilibre radiatif

On considère une surface plane Σ au voisinage de la terre, par exemple sur un satellite et exposée perpendiculairement au rayonnement solaire de valeur $C \approx 1361 \text{ W m}^{-2}$. On néglige le rôle joué par le rayonnement terrestre. On suppose de plus que la surface est diffuse.

1.1 Corps gris

On suppose dans un premier temps que la surface se comporte comme un corps gris d'émissivité $\varepsilon = 0,8$.

- Rappeler la loi de Kirchhoff et calculer la température d'équilibre radiatif de cette surface en supposant qu'elle émet sur une face, puis sur ses deux faces.
- Quelle est l'influence de l'émissivité? Établir l'équation différentielle d'évolution de sa température $T(t)$. Linéariser cette équation autour de la température d'équilibre $T(\infty)$ en posant $\theta(t) = T(t) - T(\infty)$. Donner l'expression de la constante de temps d'évolution et discuter le rôle de l'émissivité. On supposera que la capacité calorifique par unité de surface de Σ est indépendante de la température.

1.2 Corps non gris

On suppose au contraire que les coefficients d'absorption de la surface pour son propre rayonnement et le rayonnement solaire (de spectres supposés disjoints) sont respectivement $\alpha_{\text{surface}} = 0,8$ et $\alpha_{\text{soleil}} = 0,1$. Calculer sa température d'équilibre radiatif dans les deux cas précédents. Justifier l'hypothèse de recouvrement négligeable des spectres absorbé et émis.

1.3 Cas d'une sphère

Reprendre les questions précédentes dans le cas où le corps est sphérique, isotherme et émet sur toute sa surface.

2 Température de la Terre sans et avec effet de serre

Le flux solaire reçu au sommet de l'atmosphère terrestre par une surface placée perpendiculairement aux rayons solaires a pour valeur $C = 1361 \text{ W m}^{-2}$ (constante solaire terrestre). L'ensemble Terre-atmosphère présente vis-à-vis du rayonnement solaire l'albédo moyen $A = 0,3$.

- 2.1** Calculer le flux solaire *moyen* reçu par l'hémisphère éclairé au sommet de l'atmosphère et en déduire les flux solaires moyens par unité de surface réelle C' reçu et C'' absorbé globalement par la Terre.
- 2.2** On néglige l'effet de serre dû à l'atmosphère et l'on se propose de calculer la température radiative T_e de la surface terrestre. Pour cela, on assimilera la Terre à un corps noir² en équilibre radiatif. Calculer le flux solaire absorbé par la Terre et le flux tellurique infra-rouge qu'elle émet. Déterminer l'expression de sa température d'équilibre T_e et calculer sa valeur numérique. À quelle longueur d'onde sa luminance spectrale est-elle maximale?
- 2.3** On considère que l'atmosphère se comporte comme une couche qui n'absorbe pas le rayonnement solaire (elle en réfléchit une fraction A), mais présente une émissivité $\varepsilon_{\text{IR}} = 1$ dans le domaine de son propre rayonnement infra-rouge et de celui de la terre. En considérant la terre comme un corps noir idéal à la fois dans le domaine solaire et tellurique, écrire successivement les équilibres radiatifs de l'atmosphère et de la terre et en déduire les émittances de l'atmosphère et de la terre. Calculer leurs températures respectives T_A et T_T .

3 Température des planètes du système solaire

On considère que le Soleil est un corps noir sphérique de rayon R_S et de température T_S et l'on appelle D la distance moyenne du centre d'une planète du système solaire au centre du Soleil, exprimée en unités astronomiques. Le tableau ci-dessous donne pour chacune de ces planètes la valeur de D et la valeur de son albédo moyen A .

² En fait, comme la planète renvoie vers l'espace une partie A du rayonnement solaire, elle ne se comporte pas réellement comme un corps noir.

- 3.1** Déterminer l'expression de la constante solaire E à la surface de chaque planète en fonction de R_S , T_S et D , puis en fonction de E_0 , constante solaire à la surface de la Terre. Calculer la valeur de E_0 .
- 3.2** Déterminer l'expression et la valeur de la température moyenne de chaque planète, en supposant qu'elle émet comme un corps noir en équilibre radiatif avec le flux solaire absorbé.
- 3.3** Commenter les températures de surface observées par rapport au résultat de ce calcul et aux hypothèses utilisées. Discuter notamment l'hypothèse isotherme selon les planètes et calculer éventuellement la température d'équilibre local pour un soleil au zénith.

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter
D (UA)	0,39	0,75	1	1,52	5,20
Albédo (A)	0,06	0,75	0,31	0,21	0,44
T_{surface} (K)	100–650	700	288	150–300	294
excentricité	0,2056	0,0068	0,0167	0,0934	0,0483
période de rotation	58,6 j	–243 j	24 h	24,6 h	9,84 h
flux d'énergie interne par unité de surface (Wm^{-2})	0	0	0,075	0,04	5,44

Données : $1 \text{ UA} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$; $R_S = 6,9 \times 10^8 \text{ m}$; $T_S = 5820 \text{ K}$.

TD 4 ÉPAISSEUR OPTIQUE

N.-B : dans les exercices 1, 2 et 3, on considère que le gaz majoritaire est le seul absorbant.

1 Épaisseur optique, transmission et absorption

1. Show that for an optically thin layer ($\Delta\tau_\lambda \ll 1$), the optical depth is close to the absorptivity a_λ :

$$\Delta\tau_\lambda \approx a_\lambda$$

2. Parallel beam radiation is passing through a layer 100 m in thickness, containing a gas with an average density of 0.1 kg m^{-3} . The beam is directed at 60° from the normal to the layer. Calculate the optical thickness $\Delta\tau_\lambda$, transmissivity T_λ and absorptivity a_λ of the layer at wavelengths λ_1 , λ_2 and λ_3 for which the absorption coefficients α_λ are 10^{-3} , 0.1 and $1 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$, respectively. Indicate the units.

(d'après WALLACE ET HOBBS)

2 Coordonnée épaisseur optique

What fraction of the incident radiation³ Φ_0 with frequency ν is absorbed in passing through the layer of the atmosphere extending from optical depth $\tau_1 = 0.2$ to $\tau_2 = 4.0$? For an isothermal atmosphere, through how many scale heights does the layer described extend for zero zenith angle?

(d'après WALLACE ET HOBBS)

3 Épaisseur optique dans une atmosphère isotherme

Show that if the absorption coefficient per unit mass α_ν ($\text{m}^2 \text{ kg}^{-1}$) and the gravitational acceleration g (m s^{-2}) are assumed to be independent of height, the optical depth at pressure level p is given by :

$$\tau_\nu(p) = \frac{p\alpha_\nu}{g} \sec \theta \quad \text{où} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

Prove that for an isothermal atmosphere, with α_ν and g independent of height, optical depth decreases exponentially with altitude.

Example: A *hypothetical* planetary atmosphere is composed entirely of a gas with an absorption coefficient of $0.01 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$. Estimate the pressure level and the altitude at which a beam of radiation oriented at 30° from the zenith encounters an optical depth of unity. The atmosphere has a surface pressure of $1\,000 \text{ hPa}$, a gravitational acceleration of 10 m s^{-2} and an isothermal temperature profile with a scale height of 10 km .

(d'après WALLACE ET HOBBS)

4 Transmission globale de l'atmosphère

On considère la pénétration du flux solaire dans l'atmosphère terrestre supposée homogène horizontalement, dans l'approximation plan parallèle. Dans l'atténuation du flux solaire, on ne prend en compte que l'extinction due à la diffusion moléculaire (Rayleigh) et l'absorption par l'ozone. On suppose de plus que l'atmosphère est isotherme et donc que le profil vertical de la concentration du gaz atmosphérique suit une loi exponentielle, d'échelle de hauteur H : $n_{\text{air}}(z) = n_{\text{air}}(0) \exp(-z/H)$. L'objectif est d'évaluer les contributions de ces deux mécanismes à la transmission atmosphérique à deux longueurs d'onde particulières :

- $\lambda_1 \approx 0,6 \text{ }\mu\text{m}$, dans le visible, au maximum des bandes de Chappuis de l'ozone ;
- $\lambda_2 \approx 0,25 \text{ }\mu\text{m}$, dans l'ultra-violet, au maximum des bandes de Hartley de l'ozone.

3. at the top of the atmosphere

On suppose tout d'abord le soleil au zénith.

- 4.1 Calculer l'épaisseur optique totale de l'atmosphère associée à la diffusion Rayleigh, τ_1^R à λ_1 , puis τ_2^R à λ_2 .
- 4.2 L'épaisseur réduite de la colonne d'ozone étant donnée ci-dessous, calculer l'épaisseur optique totale de l'atmosphère associée à l'absorption par l'ozone, τ_1^O à λ_1 , puis τ_2^O à λ_2 .
- 4.3 Déterminer la transmission T_1 de l'atmosphère à la longueur d'onde λ_1 , puis T_2 à λ_2 . Comparer la pénétration du flux solaire jusqu'à la surface dans le visible avec celle dans l'ultra-violet et commenter.
- 4.4 Expliquer *qualitativement* comment seraient modifiées les contributions de la diffusion moléculaire et de l'absorption par l'ozone si on considérait la pénétration du flux solaire jusqu'à la tropopause seulement.
- 4.5 Que deviennent les transmissions T_1 et T_2 pour un angle zénithal de 60° ?

Rappel : l'épaisseur réduite Δz_i d'un constituant i de l'atmosphère est la hauteur de colonne verticale qu'il occuperait s'il était ramené aux conditions standard de température et de pression au niveau de la mer, c'est-à-dire s'il avait la même concentration que le gaz atmosphérique au niveau de la mer :

$$\Delta z_i \times n_{\text{air}}(0) = \int_0^\infty n_i(z) dz$$

Données :

échelle de hauteur de l'atmosphère	$H \approx 8 \text{ km}$
concentration du gaz atmosphérique au sol	$n_{\text{air}}(z = 0) \approx 2,7 \cdot 10^{25} \text{ molécules} \times \text{m}^{-3}$
section efficace d'extinction moléculaire (Rayleigh)	$\sigma_R \approx 4 \times 10^{-32} \text{ m}^2 \times \lambda[\mu\text{m}]^{-4} \text{ molécule}^{-1}$
épaisseur réduite d'ozone	$\Delta z_{\text{O}_3} \approx 3 \text{ mm}$
sections efficaces d'absorption de l'ozone	
bandes de Chappuis	$\sigma_{\text{O}_3}(\lambda_1) \approx 5 \times 10^{-25} \text{ m}^2 \text{ molécule}^{-1}$
bandes de Hartley	$\sigma_{\text{O}_3}(\lambda_2) \approx 1,1 \times 10^{-21} \text{ m}^2 \text{ molécule}^{-1}$

TD 5 ÉQUILIBRE RADIATIF DE L'ATMOSPHÈRE

1 Masse et capacité calorifique de l'atmosphère

On considère une colonne atmosphérique verticale de section d^2S . On appelle dz l'épaisseur d'une couche horizontale élémentaire et d^3m la masse du volume élémentaire qu'elle découpe dans la colonne.

1. Exprimer la masse d^2m/d^2S de la colonne totale par unité de surface en fonction de la pression en surface P_0 et calculer sa valeur numérique.

Masse de la colonne atmosphérique : $d^3m = \rho d^2S dz$ donc $d^2m = \int_0^\infty \rho d^2S dz$.

Hydrostatique : $dp = -\rho g dz$ donc

$$\frac{d^2m}{d^2S} = \frac{1}{g} \int_0^{P_0} dp = \frac{P_0}{g} = 10,2 \times 10^3 \text{ kgm}^{-2}$$

2. En déduire la masse de l'atmosphère en fonction du rayon de la Terre (expression littérale et valeur numérique).

$$M_{\text{atmos.}} = 4\pi R^2 P_0/g \approx 5,2 \times 10^{18} \text{ kg}$$

Masse de la Terre :

$$g \frac{GM_T}{R_T^2} \quad \text{où} \quad G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \quad \Rightarrow \quad M_T = \frac{gR_T^2}{G} \approx 6 \times 10^{24} \text{ kg} \approx 1 \times 10^6 M_{\text{atmos.}}$$

Masse de l'océan : $M_O \approx 1,3 \times 10^{21} \text{ kg} \approx 250 M_{\text{atmos.}}$

3. Quelle énergie par unité de surface faudrait-il fournir à la colonne d'air atmosphérique pour que sa température moyenne s'élève de 1 degré (expression littérale et valeur numérique) ?

4. À quelle hauteur d'eau l'atmosphère est-elle équivalente au point de vue calorifique⁴ ?

5. On suppose que l'apport d'énergie solaire est instantanément supprimé et que la planète Terre rayonne vers l'espace comme un corps noir durant un laps de temps suffisamment court pour considérer la température voisine de 250 K. Calculer le taux de refroidissement moyen de la Terre⁵ en K jour⁻¹ et préciser l'intervalle de temps pour lequel la température décroît de moins de 1 %.

En déduire une expression de la constante de temps radiative de l'atmosphère définie par $\frac{1}{\theta} = \frac{-1}{T} \frac{dT}{dt}$ et la calculer.

Données :

Pression en surface : $P_0 = 1000 \text{ hPa}$; $R = 6370 \text{ km}$; $C_P(\text{air}) = 1005 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Solution

10,2 tonnes/m² ; 5,2 × 10¹⁸ kg ; 10,3 MJ.m⁻² ; 2,45 m ; -1,9 K jour⁻¹.

2 Taux de chauffage quotidien de la stratosphère

Décrire les processus qui interviennent dans l'équilibre radiatif de la stratosphère. On s'intéresse à la photodissociation de l'ozone à 50 km d'altitude pour une durée moyenne du jour de 12 heures.

1. Écrire les équations chimiques de la photodissociation de l'ozone et de sa recombinaison.

2. Exprimer le taux de chauffage radiatif en fonction notamment de l'énergie de la liaison O₂-O. Quelle serait la vitesse de réchauffement de la stratosphère (en K par jour) si on supprimait l'émission par le CO₂ ?

3. Pourquoi cet équilibre radiatif conduit-il à un gradient de température positif ?

Données :

nombre d'Avogadro :

$$\mathcal{N} = 6,022 \times 10^{23}$$

masse volumique de l'air à 50 km d'altitude :

$$\rho = 1 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$$

énergie de la liaison O₂-O de la molécule O₃ :

$$\Delta W = 24 \text{ kcal mole}^{-1}$$

concentration d'ozone à 50 km :

$$[\text{O}_3] \approx 1 \times 10^{17} \text{ molécules m}^{-3}$$

taux de photodissociation de l'ozone au zénith à 50 km :

$$J_{\text{O}_3} \approx 8 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

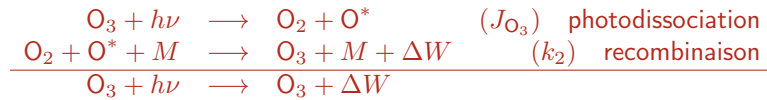
La stratosphère est en équilibre radiatif sous l'effet :

4. Le volume total des océans est de 1,37 10⁹ km³. Quelle profondeur moyenne aurait l'océan s'il était réparti uniformément sur la surface terrestre ? Comparer les capacités de stockage de chaleur des deux milieux.

5. Noter que l'océan ne suit pas les évolutions rapides de température.

- du chauffage par absorption du rayonnement solaire ultra-violet par l'ozone ;
- du refroidissement par émission infra-rouge due essentiellement au gaz carbonique et à l'ozone.

Cycle de Chapman simplifié de l'ozone (en ne gardant que les réactions rapides)



Bilan chimique nul : transformation de rayonnement solaire en énergie interne qui sera évacuée par rayonnement infra-rouge de l'atmosphère. Dissociation d'ozone :

$$\frac{d[\text{O}_3]}{dt} = -J_{\text{O}_3}[\text{O}_3] \quad \Delta W = 24 \text{ kcal/mole}$$

Puissance radiative absorbée par unité de volume :

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\Delta W}{\mathcal{N}_A} \frac{d[\text{O}_3]}{dt} = \frac{\Delta W}{\mathcal{N}_A} J_{\text{O}_3}[\text{O}_3] = \rho C_P \frac{dT}{dt}$$

Si on admet que le profil vertical d'ozone peut être assimilé à une exponentielle au dessus d'environ 35 km, on montre (profil de Chapman) que la puissance spectrale absorbée par unité de volume est maximale à une altitude \hat{z} définie par $\hat{\tau} = \tau(\hat{z}, \infty) = 1$. Cette altitude \hat{z} dépend de l'angle zénithal et de la section efficace d'absorption (donc de la longueur d'onde). On s'intéresse ici à la puissance en intégrant dans le domaine des bandes de l'ozone et on fait le calcul du taux de chauffage à 50 km.

$$\frac{dq}{dt} \approx 1,33 \times 10^{-4} \text{ Wm}^{-3} \quad \frac{dT}{dt} \approx 1,32 \times 10^{-4} \text{ Ks}^{-1} \quad \text{ou} \quad 5,7 \text{ K. jour}^{-1}$$

en considérant des journées de 12 h en moyenne. Ce résultat est modulé par le flux solaire et la concentration d'ozone, la moyenne globale étant proche de 11 K.jour^{-1} .

Le refroidissement par émission infra-rouge est dû essentiellement au gaz carbonique pour les 2/3 (-8 K.jour^{-1}) autour de $15 \mu\text{m}$, et à l'ozone pour 1/3 (-4 K.jour^{-1}) autour de $9,6 \mu\text{m}$. Pour simplifier, on ne prendra en compte que la contribution du CO_2 , dans le cadre de l'approximation *cooling to space*.

L'équilibre radiatif impose donc qu'en fonction de l'altitude, les termes d'absorption et d'émission évoluent de la même façon.

$$J_{\text{O}_3}[\text{O}_3] \propto [\text{CO}_2] \overline{B_{\nu_{\text{CO}_2}}}(T(z))$$

où $\overline{B_{\nu_{\text{CO}_2}}}(T(z))$ désigne la fonction de Planck intégrée dans la bande d'émission du CO_2 .

Or la fonction de Planck est croissante avec la température. Dire que la température croît avec l'altitude équivaut donc à dire que B_ν croît avec z . Sachant que $B_\nu \propto \frac{J_{\text{O}_3}[\text{O}_3]}{[\text{CO}_2]}$,

$$\frac{d \ln B_\nu}{dz} = \frac{d \ln J_{\text{O}_3}[\text{O}_3]}{dz} - \frac{d \ln [\text{CO}_2]}{dz} = \frac{d \ln J_{\text{O}_3}[\text{O}_3]}{dz} + \frac{1}{H}$$

où H est la hauteur d'échelle de l'atmosphère, car CO_2 est en rapport de mélange constant dans l'homosphère.

À l'altitude \hat{z} du maximum d'absorption par unité de volume, le premier terme est nul donc le gradient de température est positif.

Plus généralement, si on ne prend en compte que le flux direct, $J_{\text{O}_3}(z) = J_{\text{O}_3}(\infty)e^{-\tau_{\text{O}_3}}$,

$$\frac{d \ln B_\nu}{dz} = \sigma_{\text{O}_3}[\text{O}_3] - \frac{1}{H_{\text{O}_3}} + \frac{1}{H}$$

reste positif tant que :

$$\sigma_{\text{O}_3}[\text{O}_3]H_{\text{O}_3} > 1 - \frac{H_{\text{O}_3}}{H} \approx \frac{3}{8}$$

Le gradient ne s'annule qu'à l'altitude z_* du maximum du taux de chauffage définie par :

$$z_* = \hat{z} + H_{\text{O}_3} \ln \frac{H}{H - H_{\text{O}_3}}$$

3 Méthode à deux flux dans une atmosphère non diffusante

On considère le rayonnement de grande longueur d'onde se propageant dans une atmosphère que l'on suppose stratifiée horizontalement. On suppose aussi que le rayonnement infra-rouge est absorbé par un seul constituant \mathbf{X} de coefficient d'absorption α (en $\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$) indépendant de la longueur d'onde et de l'altitude. On adopte les notations suivantes : $P(z)$, $T(z)$, $\rho(z)$ pression, température et masse volumique du constituant \mathbf{X} à l'altitude z , $\tau(z)$ épaisseur optique à l'altitude z (entre le sommet de l'atmosphère et l'altitude z), $B(z)$ luminance énergétique à l'altitude z de l'atmosphère rayonnant comme un corps noir, B_s luminance énergétique de la surface terrestre ($\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$), $F_{\uparrow}(z)$, $F_{\downarrow}(z)$ flux de rayonnement infrarouge montant, descendant à l'altitude z .

On rappelle qu'au sommet de l'atmosphère $\tau(\infty) = 0$, $P = 0$ et $\rho = 0$. On pose :

$$\Phi(z) = F_{\uparrow}(z) - F_{\downarrow}(z) \quad \text{flux net} \quad (3)$$

$$\Psi(z) = F_{\uparrow}(z) + F_{\downarrow}(z) \quad (4)$$

1. En supposant l'équilibre hydrostatique du constituant ⁶ \mathbf{X} , montrer que $\tau(z)$ est proportionnelle à la pression $P(z)$ à cette altitude :

$$\tau(z) = AP(z) \quad (\text{pour le domaine infra-rouge})$$

2. Justifier les expressions

$$\frac{dF_{\uparrow}(z)}{d\tau(z)} = [F_{\uparrow}(z) - \pi B(z)] \quad \text{et} \quad \frac{dF_{\downarrow}(z)}{d\tau(z)} = -[F_{\downarrow}(z) - \pi B(z)]$$

et en déduire les expressions des dérivées $\frac{d\Phi}{d\tau(z)}$ et $\frac{d\Psi}{d\tau(z)}$.

3. Montrer qu'à l'équilibre radiatif, $\Phi(z)$ est indépendant de l'altitude : on le notera Φ_0 . En déduire que la luminance énergétique de l'atmosphère à l'altitude z est une fonction affine de l'épaisseur optique à ce niveau :

$$B(z) = \frac{\Phi_0}{2\pi} [\tau(z) + 1]$$

et préciser l'expression de la luminance énergétique de l'atmosphère $B(z)$ à l'altitude $z = 0$. Peut-on évaluer l'influence des gaz à effet de serre ?

4. Calculer F_{\uparrow} au niveau de la surface et la luminance énergétique B_s de la surface. en fonction de τ_0 , l'épaisseur optique totale de l'atmosphère. En déduire la discontinuité de la luminance énergétique à la surface. Par quel mécanisme cette discontinuité est-elle supprimée ?

5. Calculer l'épaisseur optique τ_0 totale de l'atmosphère, celle τ_1 de la troposphère et la discontinuité de température à la surface qui résulterait de l'équilibre radiatif.

Données :

constante de Stefan $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$.

surface $T_0 = 280 \text{ K}$ $P_0 = 1000 \text{ hPa}$

tropopause $T_{\text{trop}} = 220 \text{ K}$ $P_{\text{trop}} = 250 \text{ hPa}$

4 Mesure d'absorption par lidar : répartition spectrale de l'absorption

On s'intéresse à la mesure de l'absorption de composés atmosphériques minoritaires (H_2O) par télédétection *lidar* dans l'infra-rouge proche.

4.1 Le lidar : description succincte

Le lidar est un instrument de mesure analogue au radar, mais dans le domaine optique. Il émet un faisceau laser très directif qui se propage dans l'atmosphère et interagit par absorption et diffusion avec le gaz atmosphérique, les nuages et les aérosols. Une infime partie du rayonnement émis par le lidar est rétrodiffusée et collectée par un télescope : l'analyse de ce signal permet de restituer notamment des profils de composés atmosphériques. Si le lidar émet des impulsions très courtes, le temps d'aller et retour permet d'identifier l'altitude de la couche responsable de la rétrodiffusion : le lidar à impulsions permet donc de mesurer des profils verticaux. Deux facteurs, dépendant de l'altitude et de la longueur d'onde émise λ , interviennent dans le rayonnement reçu :

6. Discuter les conditions justifiant une telle hypothèse.

- le coefficient de rétrodiffusion par unité de longueur traditionnellement noté $\beta(z, \lambda)$,
- la transmission aller-retour entre la surface et l'altitude z , soit $\exp[-2\tau(z, \lambda)]$, qui s'obtient en intégrant le coefficient d'extinction $\alpha(z, \lambda)$ sur le trajet du faisceau : $\tau(z, \lambda) = \int_0^z \alpha(z', \lambda) dz'$.

Le signal rétrodiffusé est intercepté sous l'angle solide $\Omega = A/z^2$ où A est la surface du télescope. Le signal $S(z, \lambda)$, reçu de l'altitude z est donc proportionnel au produit :

$$\frac{A}{z^2} \beta(z, \lambda) \exp[-2\tau(z, \lambda)]$$

Il décroît donc très rapidement avec l'altitude⁷. Les molécules du gaz atmosphérique, les particules et les nuages contribuent à la diffusion, donc à la fois à la rétrodiffusion (β , voir éq. 5) et à l'extinction (α , voir éq. 6).

$$\beta(z, \lambda) = \sum_i n_i(z) \frac{d^2 \sigma_i(\lambda)}{d^2 \Omega}(\pi) \quad (5)$$

Mais, selon la longueur d'onde, l'extinction peut comporter aussi un terme d'absorption par des gaz minoritaires ou des particules :

$$\alpha(z, \lambda) = \alpha_{\text{diff}} + \alpha_{\text{abs}} = \sum_i n_i(z) \sigma_i^{\text{diff}}(\lambda) + \sum_j n_j(z) \sigma_j^{\text{abs}}(\lambda) \quad (6)$$

Ces différentes contributions permettent de restituer des profils verticaux de concentration des majoritaires (en s'appuyant sur le terme de rétrodiffusion Rayleigh), d'aérosols et de nuages (en s'appuyant sur la diffusion de Mie), ou de composés minoritaires (en exploitant le terme d'absorption dans α).

4.2 Lidar à absorption différentielle

Pour mesurer par exemple un profil vertical de vapeur d'eau dans la basse atmosphère, on émet alternativement deux faisceaux à des longueurs d'onde très proches dont l'une (λ_1) est absorbée par la vapeur d'eau et l'autre (λ_2) très peu : c'est la méthode dite d'*absorption différentielle* (DIAL).

- 1 En admettant que $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ est suffisamment faible pour que les termes de diffusion par le gaz atmosphérique et par les aérosols soient identiques aux deux longueurs d'onde, donner l'expression du rapport $S(z, \lambda_2)/S(z, \lambda_1)$ des signaux lidar reçus aux deux longueurs d'onde.
- 2 Comment peut-on déduire la concentration de vapeur d'eau de ce rapport ?

4.3 Rôle d'un fond continu dans l'émission du lidar DIAL

On considère le rayonnement émis par le laser verticalement dans l'atmosphère en proche infra-rouge et son absorption par un composé X_i en fonction de l'altitude et de la fréquence. Pour simplifier, on néglige l'émission atmosphérique et la diffusion⁸. Le seul processus étudié est donc ici l'absorption. On s'intéresse à un domaine spectral dans lequel seul le composant atmosphérique, X_i , présente une absorption significative. On note $n_i(z)$ le profil vertical de concentration de X_i (en molécules.m⁻³). Dans ce domaine spectral, l'absorption par le composé X_i peut être représentée par sa section efficace d'absorption $\sigma(\nu)$ en m² par molécule d'absorbant, supposée indépendante de l'altitude. On suppose que cette section efficace présente un maximum σ_0 à la fréquence ν_0 et qu'elle décroît *strictement* vers zéro de part et d'autre de ν_0 . C'est par exemple le cas d'une raie gaussienne.

Dans la distribution spectrale du flux émis par le laser, $\Phi(\nu, z = 0)$ (en W m⁻² Hz⁻¹), (qui comporte une raie fine par rapport à la raie d'absorption que l'on n'étudie pas ici), on considère seulement le fond continu beaucoup plus large que la raie d'absorption et supposé uniforme de valeur Φ_0 . Au cours de la propagation vers le haut, la distribution spectrale du flux du faisceau laser $\Phi(\nu, z)$ va être modifiée par l'absorbant.

- 1 Rappeler la loi élémentaire d'atténuation du flux spectral $\frac{d\Phi}{dz}$ en fonction de l'altitude.

$$\frac{d\Phi(\nu, z)}{dz} = -\sigma(\nu) n_i(z) \Phi(\nu, z)$$

- 2 Déterminer l'épaisseur optique $\tau(\nu, z)$ entre le sol et l'altitude z en fonction du contenu intégré de l'absorbant $N_i(z) = \int_0^z n_i(z') dz'$.

7. La dynamique est moins défavorable dans le cas de mesures embarquées sur avion ou satellites, en visée vers le bas

8. S'il est légitime de négliger l'émission en proche IR, la diffusion est nécessaire pour récupérer un signal de retour.

Si, de plus, la concentration de l'absorbant X_i décroît verticalement selon une loi exponentielle de hauteur d'échelle H_i , exprimer $\tau(\nu, z)$ en fonction de z , $\sigma(\nu)$, H_i et $n_i(0)$; en déduire l'épaisseur optique totale de l'atmosphère à ν .

$$\tau(\nu, z) = \sigma(\nu) \int_0^z n_i(z') dz' = \sigma(\nu) N_i(z)$$

Si $n_i(z) = n_i(0) \exp(-z/H_i)$,

$$N_i(z) = n_i(0) H_i [1 - \exp(-z/H_i)] = H_i [n_i(0) - n_i(z)]$$

$$N_i(\infty) = H_i n_i(0).$$

3 En déduire la transmission $T(\nu, z) = \Phi(\nu, z)/\Phi_0$ de la couche $[0, z]$ en fonction de $\tau(\nu, z)$. Tracer l'allure de $\tau(\nu, z)$ et de $T(\nu, z)$ en fonction de ν , à z fixé; préciser pour les deux courbes les valeurs extrêmes.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dz} = -\sigma(\nu) n_i(z) &\Rightarrow \frac{d \ln \Phi}{dz} = -\sigma(\nu) n_i(z) = -\frac{d\tau}{dz} \\ \ln \frac{\Phi(\nu, z)}{\Phi_0} = -\tau(\nu, z) &\Rightarrow T(\nu, z) = \frac{\Phi(\nu, z)}{\Phi_0} = \exp(-\tau(\nu, z)) \end{aligned}$$

Soit $R(\nu, z) = -\frac{d\Phi(\nu, z)}{dz}$ le taux de transfert d'énergie au milieu par absorption (par unité de volume et de fréquence). On se propose de montrer que, si l'absorption est forte, ce transfert peut être plus important sur les ailes de la raie qu'au centre.

1 Exprimer R en fonction de Φ_0 , $\tau(\nu, z)$, $\sigma(\nu)$ et $n_i(z)$.

$$R(\nu, z) = -\frac{d\Phi(\nu, z)}{dz} = \sigma(\nu) n_i(z) \Phi(\nu, z) = \Phi_0 \sigma(\nu) n_i(z) \exp(-\tau(\nu, z))$$

2 À quelle condition portant sur $\frac{d\sigma}{d\nu}$ et $\tau(\nu, z)$ ce taux R passe-t-il par un extremum en fonction de la fréquence, à altitude fixée?

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{d\nu} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\nu} - \frac{d\tau}{d\nu} = [1 - \tau(\nu, z)] \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{d\nu}$$

3 Discuter, selon la valeur de l'épaisseur optique $\tau(\nu_0, z)$ au centre de la raie, le nombre d'extrema et les variations de R en fonction de la fréquence et représenter l'allure de $R(\nu)$. Dans chaque cas, on précisera pour quelle valeur τ^* de l'épaisseur optique, le taux de transfert $R(\nu)$ présente, à une altitude donnée, un maximum en fonction de la fréquence et la valeur R_{MAX} de ce maximum.

(a) $\tau(\nu_0, z) < 1$ (cas de l'absorption faible)

(b) $\tau(\nu_0, z) > 1$ (cas de l'absorption forte)

$$\text{Montrer que dans ce dernier cas, } R_{\text{MAX}} = \frac{\Phi_0 n_i(z)}{e N_i(z)}.$$

Si, de plus, la concentration de l'absorbant X_i décroît verticalement selon une loi exponentielle de hauteur d'échelle H_i , exprimer R_{MAX} en fonction de Φ_0 , z et H_i .

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{d\nu} = 0 \iff \begin{cases} \frac{d\sigma}{d\nu} = 0 & \text{soit } \nu = \nu_0 \\ \text{ou} \\ \tau(\nu, z) = 1 & \text{possible si } \tau(\nu_0, z) \geq 1 \end{cases}$$

(a) $\tau(\nu_0, z) < 1$ (cas de l'absorption faible)

Un seul extremum qui est un maximum à ν_0 :

$$R_{\text{MAX}} = \Phi_0 \sigma_0 n_i(z) \exp(-\sigma_0 N_i(z))$$

(b) $\tau(\nu_0, z) > 1$ (cas de l'absorption forte)

Trois extrema : R est minimum à ν_0 et maximal à ν_{\pm} tel que $\tau(\nu_{\pm}) = 1$.

$$R_{\text{MAX}} = \frac{\Phi_0}{e} \sigma(\nu_{\pm}) n_i(z) = \frac{\Phi_0}{e} \frac{n_i(z)}{N_i(z)}$$

Si n_i est exponentielle,

$$R_{\text{MAX}} = \frac{\Phi_0}{eH_i} \frac{\exp(-z/H_i)}{1 - \exp(-z/H_i)} = \frac{\Phi_0}{eH_i} \frac{1}{\exp(z/H_i) - 1}$$

4 On suppose que $\sigma_0 N_i(\infty) > 1$. Décrire brièvement l'évolution avec l'altitude des courbes $R(\nu)$.

Si $\sigma_0 N_i(\infty) > 1$, il existe une altitude z_0 telle que $\sigma_0 N_i(z_0) = 1$: c'est celle où on passe d'un maximum en fréquence en ν_0 à trois extrema avec un minimum en ν_0 . Pour $z > z_0$, les extrema s'écartent progressivement de ν_0 au fur et à mesure que l'altitude croît.