Chapitre 1

Grandeurs radiométriques

1.1 Grandeurs géométriques

1.1.1 Angle solide Ω

Définition

L'***angle solide*** Ω sous lequel est vue une surface S depuis un point A est l'aire de la calotte sphérique Σ_1 découpée dans la sphère de rayon unité centrée en A par les rayons issus de A et s'appuyant sur le bord de la surface S. Il ne dépend que du cône de sommet A ainsi défini.
L'angle solide correspondant à tout l'espace est 4π.

Exemple d'un cube

Considérer un point quelconque sur un cube et les angles solides sous-lesquels on voit, depuis ce point, l'intérieur, puis l'extérieur du cube.

– si le point est sur une face, $\Omega_{\text{int}} = 2\pi$ et $\Omega_{\text{ext}} = 2\pi$
– si le point est sur une arête, $\Omega_{\text{int}} = \pi$ et $\Omega_{\text{ext}} = 3\pi$
– si le point est sur un sommet, $\Omega_{\text{int}} = \pi/2$ et $\Omega_{\text{ext}} = 7\pi/2$

Angle solide élémentaire

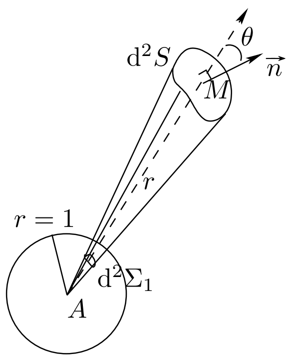

FIGURE 1.1 – Angle solide élémentaire

$$\mathrm{d}^2\Omega = \frac{\mathrm{d}^2\Sigma_1}{1^2} = \frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{r^2} = \frac{\mathrm{d}^2S\cos\theta}{r^2} \quad \text{(par homothétie)}$$

où $\theta = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\mathrm{d}^2S})$ est l'angle entre la direction $\overrightarrow{AM}$ et la normale à la surface d^2S.

L'unité d'angle solide est le stéradian (sr). Mais, du point de vue équations aux dimensions, un angle solide est le rapport du carré d'une longueur transverse sur le carré d'une longueur radiale, il est donc homogène à un nombre sans dimension [1].

1. Depuis 1995, avec la 20e Conférence générale des poids et mesures, la mention du stéradian est devenue facultative. Mais en radiométrie, le stéradian est généralement maintenu, en particulier dans les unités dérivées.

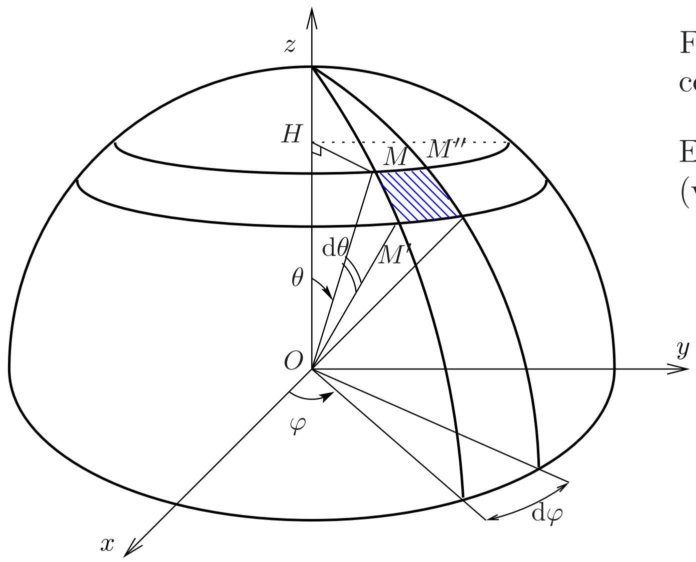

FIGURE 1.2 – Angle solide élémentaire en coordonnées sphériques

Expression de l'angle solide élémentaire (vu du point O) en coordonnées sphériques.

$$\mathrm{d}^2 S = \mathrm{d}^2\Sigma = MM' \times MM''$$

$$MM' = OM\,\mathrm{d}\theta = r\,\mathrm{d}\theta$$

$$MM'' = HM \times \mathrm{d}\varphi = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\boxed{\mathrm{d}^2\Omega = \frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{r^2} = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi} \qquad (1.1)$$

Exemple d'un cône de révolution

Angle solide défini par un cône à base circulaire de demi-angle au sommet α

$$\Omega = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \int_{\theta=0}^{\alpha} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\,[-\cos\theta]_0^{\alpha}$$

$$\Omega = 2\pi\,[1-\cos\alpha] = 4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Cas particuliers :

– Pour les petits angles

$$\Omega \approx 4\pi\frac{\alpha^2}{4} = \pi\alpha^2$$

à rapprocher de

$$\mathrm{d}^2\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \approx \theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \quad \Omega \approx 2\pi\frac{\alpha^2}{2} = \pi\alpha^2$$

– Cas d'un hémisphère ($\alpha = \pi/2$) : $\Omega_{1/2} = 2\pi$.
– Cas de tout l'espace($\alpha = \pi$) : $\Omega = 4\pi = 4\pi \times 1^2$ (surface de la sphère).

1.1.2 Étendue géométrique d'un faisceau

Dans un milieu homogène (indice uniforme), la propagation est rectiligne. Deux surfaces élémentaires en regard, d^2S sur la source et d^2S' sur le récepteur, à distance D grande devant les dimensions des surfaces déterminent un tube de lumière élémentaire (fig. 1.3, p. 3).

$$\mathrm{d}^2\Omega = \frac{\mathrm{d}^2S'\cos\theta'}{D^2} = \frac{\mathrm{d}^2\Sigma'}{D^2} \qquad \mathrm{d}^2\Omega' = \frac{\mathrm{d}^2S\cos\theta}{D^2} = \frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{D^2}$$

L'***étendue géométrique***, d^4U, du faisceau élémentaire est définie par :

$$\boxed{\mathrm{d}^4U = \mathrm{d}^2S\cos\theta\,\mathrm{d}^2\Omega = \frac{\mathrm{d}^2S\cos\theta\,\mathrm{d}^2S'\cos\theta'}{D^2} = \frac{\mathrm{d}^2\Sigma\,\mathrm{d}^2\Sigma'}{D^2} = \mathrm{d}^2S'\cos\theta'\,\mathrm{d}^2\Omega' \quad (\text{en m}^2\text{ sr})} \qquad (1.2)$$

Pour tenir compte de l'indice n de réfraction du milieu (de la même façon qu'on déduit le chemin optique du chemin géométrique), on définit l'étendue optique, $\mathrm{d}^4O = n^2\,\mathrm{d}^4U$. En vertu

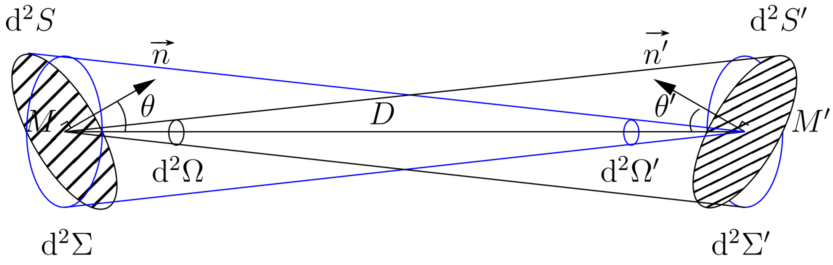

FIGURE 1.3 – Étendue géométrique d'un faisceau élémentaire

des lois de la réfraction (Snell-Descartes), l'étendue optique est conservée dans un système optique. Dans un milieu homogène, l'étendue géométrique est donc conservée.

Pour une source étendue, $\mathrm{d}^2U = \iint_S \mathrm{d}^2S \cos\theta \, \mathrm{d}^2\Omega = \Sigma \, \mathrm{d}^2\Omega$, si D est assez grande devant les dimensions de S pour que l'angle solide $\mathrm{d}^2\Omega$ reste indépendant de la position du point M sur S.

Exemple : étendue géométrique du faisceau lumineux issu du soleil et intercepté par la Terre

$R_S, R_T \ll D_{TS}$ donc on peut considérer que l'expression de l'étendue élémentaire est suffisante.

$$U = \frac{\Sigma_S \Sigma_T}{D^2} = \frac{\pi^2 R_S^2 R_T^2}{D^2} \approx 8,8 \times 10^9 \ \mathrm{m^2sr}$$

1.2 Grandeurs radiométriques

1.2.1 Flux énergétique

Flux énergétique Φ en W : puissance du rayonnement électromagnétique émis par une source, transporté par un faisceau ou intercepté par un récepteur.

Répartition spectrale du flux :

$$\text{en longueur d'onde} \quad \phi_\lambda = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\lambda}\right| \quad \text{en W m}^{-1}$$

$$\text{en fréquence} \quad \phi_\nu = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\nu}\right| \quad \text{en W Hz}^{-1}$$

$$\lambda = c/\nu \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\lambda = -\frac{c}{\nu^2}\,\mathrm{d}\nu$$

$$\phi_\lambda = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\lambda}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\nu}\right| \left|\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right| = \frac{\nu^2}{c}\phi_\nu \quad \text{et} \quad \phi_\nu = \frac{\lambda^2}{c}\phi_\lambda$$

Donc la longueur d'onde du maximum de ϕ_ν est décalée vers les grandes longueurs d'onde (voir par exemple 2.2.4, p. 14) par rapport à celle du maximum de ϕ_λ.

Le flux énergétique dans la bande de longueur d'onde $[\lambda_1, \lambda_2]$ par exemple, est donné par :

$$\Phi_{[\lambda_1,\lambda_2]} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \phi_\lambda \, \mathrm{d}\lambda$$

La notion de répartition spectrale introduite pour le flux s'applique aussi aux quantités définies ci-dessous.

1.2.2 Luminance énergétique

Le flux énergétique transmis est proportionnel à l'étendue géométrique du faisceau. On définit la ***luminance énergétique*** L (**radiance** en anglais) par :

$$\boxed{L = \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^4U} = \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^2S\cos\theta\,\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^2\Sigma\,\mathrm{d}^2\Omega} \quad \text{en W m}^{-2}\text{ sr}^{-1}} \tag{1.3}$$

L est la puissance émise par unité d'angle solide et par unité de surface *normale* à la direction d'émission. En général L dépend de la direction (θ, ϕ).

Une source est dite ***lambertienne*** si L est indépendante de la direction d'émission (θ, ϕ).

1.2.3 Intensité énergétique

L'***intensité énergétique*** (**radiant intensity** en anglais) dans une direction $\vec{u}$ est le flux énergétique émis par unité d'angle solide autour de cette direction (par l'ensemble de la source)

$$\boxed{I(\vec{u}) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}^2\Omega} \quad (\text{en W sr}^{-1})} \tag{1.4}$$

L'intensité émise par une surface élémentaire d^2S s'écrit en fonction de sa luminance :

$$\mathrm{d}^2I(\vec{u}) = \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^2\Omega} = L\,\mathrm{d}^2\Sigma = L\,\mathrm{d}^2S\cos\theta$$

L'intensité émise par une surface finie s'obtient par intégration :

$$I = \iint_S \mathrm{d}^2I = \iint_S \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^2\Omega} = \iint_S L\cos\theta\,\mathrm{d}^2S$$

L'***indicatrice d'émission*** est le lieu que décrit l'extrémité P du vecteur $\overrightarrow{MP}$ issu du point M de direction $\vec{u}$ et de module $I(\vec{u})$.

Si la surface est lambertienne, $I(\theta) = I(0)\cos\theta$. L'indicatrice d'émission est alors une sphère tangente à la surface au point considéré et de diamètre $I(\theta = 0)$.

Cas du flux parallèle

Noter que le cas d'un flux parallèle (auquel on peut par exemple assimiler le rayonnement solaire incident sur la Terre) présente une singularité en terme de répartition angulaire : sa luminance et son intensité sont nulles dans toutes les directions, sauf une où elles sont infinies. Plus précisément, elles peuvent être représentées comme le produit de deux distributions de Dirac selon les deux angles θ et φ. C'est pourquoi on utilise rarement ces grandeurs pour décrire un flux parallèle.

1.2.4 Émittance énergétique

L'***émittance énergétique***, ou exitance (**radiant emittance** en anglais) en un point de la source est le flux énergétique émis (dans toutes les directions) par unité de surface *réelle*.

$$\boxed{M = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}^2S} \quad (\text{en W m}^{-2})} \tag{1.5}$$

L'émittance dans un angle solide élémentaire $\mathrm{d}^2\Omega$ s'écrit en fonction de la luminance :

$$\mathrm{d}^2 M = \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^2 S} = L\cos\theta\,\mathrm{d}^2\Omega$$

L'émittance hémisphérique s'obtient par intégration sur le demi-espace :

$$M = \iint_{2\pi} \mathrm{d}^2 M = \iint_{2\pi} \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^2 S} = \iint_{2\pi} L\cos\theta\,\mathrm{d}^2\Omega$$

Exemple : puissance émise dans un cône de révolution

On considère une source *plane* de surface infinitésimale $\mathrm{d}^2 S$ qui émet dans un cône de révolution d'axe normal à la surface et d'angle au sommet 2α. En coordonnées sphériques centrées sur l'émetteur et d'axe z selon l'axe du cône,

$$\mathrm{d}^2\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}^2 M = L\cos\theta\,\mathrm{d}^2\Omega = L\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$M = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int_{\theta=0}^{\alpha} L\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Si L est indépendant de φ,

$$M = 2\pi\int_{\theta=0}^{\alpha} L\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Si de plus, L est indépendant de θ,

$$M = \pi L\int_{\theta=0}^{\alpha} \mathrm{d}(\sin^2\theta) = \pi L\sin^2\alpha$$

Comme l'angle solide sous-lequel se fait l'émission vaut $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$,

$$M = L\Omega\cos^2(\alpha/2) \neq L\Omega \quad \text{sauf si } \alpha \text{ est faible}^{2}$$

Dans le cas d'une émission hémisphérique **lambertienne** ($\Omega = 2\pi$),

$$\boxed{M = \pi L} \tag{1.6}$$

1.2.5 Éclairement énergétique

L'***éclairement énergétique*** (**irradiance** en anglais) est le flux reçu par unité de surface réelle (issu de toutes les directions).

$$\boxed{E' = \frac{\mathrm{d}^2\Phi_r}{\mathrm{d}^2 S'} \quad (\text{en W m}^{-2})} \tag{1.7}$$

L'éclairement énergétique est, pour le récepteur, l'analogue de l'émittance pour l'émetteur.

L'éclairement énergétique sous un angle solide élémentaire s'écrit en fonction de la luminance :

$$\mathrm{d}^2 E' = \frac{\mathrm{d}^4\Phi}{\mathrm{d}^2 S'} = L\cos\theta'\,\mathrm{d}^2\Omega'$$

L'éclairement hémisphérique s'obtient par intégration sur l'angle solide :

$$E' = \iint_{2\pi} \mathrm{d}^2 E' = \iint_{2\pi} L\cos\theta'\,\mathrm{d}^2\Omega'$$

Si la luminance incidente est isotrope, $E' = \pi L$.

2. Avec une source plane, l'angle entre la normale à la surface et la direction d'émission introduit un facteur $\cos\theta$ dans l'intégrande, responsable du coefficient $\cos^2(\alpha/2)$.

1.2.6 Flux orientés à travers un plan

Dans l'atmosphère homogène horizontalement, on introduit des flux verticaux orientés par unité de surface, $F^\uparrow$ et $F^\downarrow$ à travers un plan horizontal pour établir des bilans énergétiques couche par couche.

$$F = \iint_{4\pi} \mathrm{d}^2 E' = \iint_{4\pi} L \cos\theta' \,\mathrm{d}^2\Omega' = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} L(\theta,\varphi)\ \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

où θ est l'angle par rapport à la verticale ou angle zénithal.

Changement de variable : $\mu = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\mu = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$.

$$F = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^{1} L(\mu,\varphi)\ \mu d\mu \,\mathrm{d}\varphi$$

Décomposition du flux net (F), en flux montant ($F^\uparrow$) et flux descendant ($F^\downarrow$) : $F = F^\uparrow - F^\downarrow$

$$F^\uparrow = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^{1} L(\mu,\varphi)\ \mu \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\varphi$$

$$F^\downarrow = -\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^{0} L(\mu,\varphi)\ \mu \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\varphi$$

Changement de variable $\mu' = |\mu|$.

$$F^\downarrow = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^{1} L(-\mu,\varphi)\ \mu \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\varphi$$

Dans le cas d'un rayonnement isotrope, la luminance est indépendante de la direction et $F^\uparrow = \pi L = F^\downarrow$, donc le flux net F est nul.

1.2.7 Énergie volumique et flux sphérique

Énergie électromagnétique volumique e

L'énergie rayonnée dans un angle solide $\mathrm{d}^2\Omega$ autour de la direction $\vec{u}$ à travers la surface $\mathrm{d}^2\Sigma$ pendant une durée $\mathrm{d}t$ est la fraction de l'énergie électromagnétique contenue dans le volume cylindrique $\mathrm{d}^2\Sigma\ c\,\mathrm{d}t$ qui se propage dans la direction $\mathrm{d}^2\Omega$ autour de $\vec{u}$:

$$L \,\mathrm{d}^2\Sigma \,\mathrm{d}^2\Omega \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}^2\Omega} \mathrm{d}^2\Omega \,\mathrm{d}^2\Sigma\ c\,\mathrm{d}t$$

où e est ***l'énergie par unité de volume*** en Jm^{-3}. Donc $\mathrm{d}^2 e = \dfrac{L}{c}\ \mathrm{d}^2\Omega$.

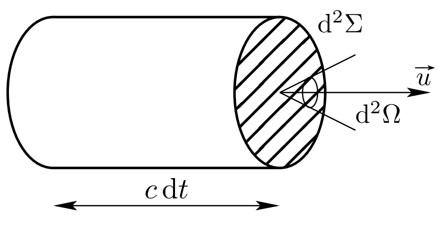

FIGURE 1.4 – Énergie rayonnée pendant la durée $\mathrm{d}t$ à travers la surface élémentaire $\mathrm{d}^2\Sigma$ dans la direction $\vec{u}$ à $\mathrm{d}^2\Omega$ près.

Dans le cas d'un rayonnement isotrope, $e = \dfrac{4\pi L}{c}$.

Flux sphérique

Le ***flux sphérique*** ou ***flux actinique***, q est la puissance par unité de surface qui permet d'évaluer les interactions du rayonnement avec les molécules assimilées à des sphères quasi-ponctuelles. Il prend donc en compte *également* toutes les directions incidentes. Le ***flux sphérique***, q, est la limite de la puissance reçue de toutes les directions par unité de surface $\mathrm{d}^2\Sigma$ perpendiculaire au rayonnement par une sphère dont le rayon tend vers 0.

$$q = \iint_{4\pi} L \, \mathrm{d}^2\Omega' = ec$$

Dans le cas où le rayonnement est isotrope, $q = ec = 4\pi L$.

Résumé des relations entre grandeurs énergétiques

À traiter en exercice : résumer sur une page les différentes grandeurs énergétiques introduites avec leurs unités, le schéma de la géométrie éventuellement associée et les relations (intégration, dérivation) entre elles. Préciser le cas particulier lambertien.