Chapitre II - Introduction aux filtres

Résumé de cours (UE LE202)

Plan

1. Utilité des filtres
2. Rappels sur l'échelle logarithmique et les décibels
3. Différents types de filtres et leurs caractéristiques
4. Filtres passifs analogiques
5. Filtres actifs analogiques et filtres numériques

---

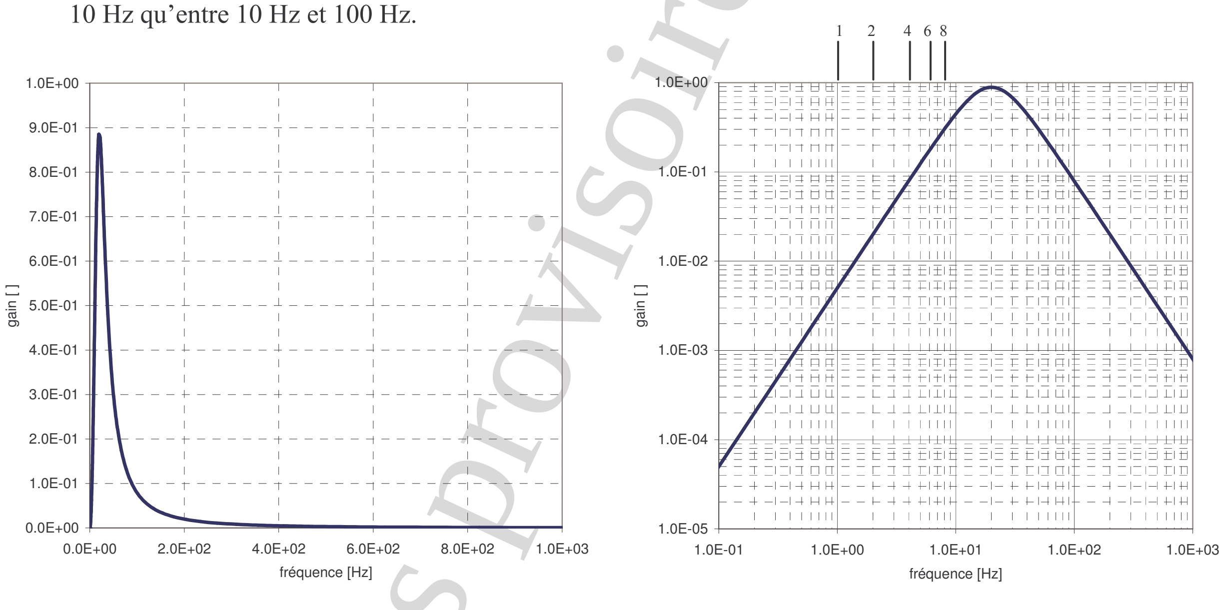
1. Utilité des filtres

En électronique, un filtre est un circuit qui permet de sélectionner des signaux ayant une certaine fréquence et d'atténuer les autres. Un exemple de la vie courante est le filtre radio qui sélectionne le signal dont la fréquence correspond à la station que l'on souhaite écouter et atténue suffisamment les autres.

2. Rappels sur l'échelle logarithmique et les décibels

a) Echelle logarithmique

Pour une échelle linéaire, la distance entre deux points est proportionnelle à la différence des valeurs de ces deux points. Pour une échelle logarithmique, la distance entre deux points est proportionnelle au logarithme du rapport des valeurs de ces deux points. Par exemple, Fig.1a la distance est la même entre 200 Hz et 400 Hz qu'entre 600 Hz et 800 Hz alors que Fig.1b la distance est la même entre 1 Hz et 10 Hz qu'entre 10 Hz et 100 Hz.



(a) (b)

Fig.1- Représentation d'une même fonction en
a) échelle linéaire sur les deux axes, b) échelle logarithmique sur les deux axes (log-log)

Notons qu'en conséquence il n'existe pas de zéro sur un axe gradué avec une échelle logarithmique. L'utilisation d'une échelle logarithmique est particulièrement adaptée quand la gamme de valeurs est étendue (variation de plusieurs ordres de grandeur) : cela permet en effet, contrairement à l'échelle linéaire, de donner une importance identique aux faibles valeurs par rapport aux fortes comme le présente l'exemple ci-dessus où une même fonction G(f) est tracée sur les deux types de graphiques

(Fig.1). Une autre utilité est de montrer graphiquement qu'un phénomène varie exponentiellement. En effet, si $y = Ae^{\alpha x}$ alors la représentation de y en fonction de x avec une échelle logarithmique en ordonnée et linéaire en abscisse (diagramme semi-logarithmique) revient à tracer $\log_{10}(y)$ en fonction de x : ainsi, on obtient une droite (cf. le TP1 sur la caractérisation d'une diode). De même, si $y = Ax^n$ alors la représentation de y en fonction de x avec une échelle logarithmique en ordonnée et en abscisse (diagramme « log-log ») revient à tracer $\log_{10}(y)$ en fonction de $\log_{10}(x)$: ainsi, on obtient une droite (de pente positive si $n > 0$ et négative si $n < 0$).

b) Bel (B) et décibel (dB)

Le logarithme décimal (noté par la suite $\log_{10}$) d'un rapport de puissance s'exprime en Bel. Par exemple, si à l'entrée d'une ligne de transmission la puissance est de 2 W et à la sortie de 0,5 W, on dira que la ligne atténue le signal de $\log_{10}(2/0,5)$ Bels soit 0,6 B. Le décibel (dB) est plus largement utilisé avec 10 dB ≡ 1 B. Soit : $G = 10\log_{10}(P_1/P_2)$ en dB. Dans l'exemple précédent, l'atténuation est de 6 dB.
Si ce ne sont plus des rapports de puissance qui sont en jeu mais de tension ou de courant alors le rapport des tensions (ou des courants) en dB vaut $20\log_{10}(U_1/U_2)$ (ou $20\log_{10}(I_1/I_2)$). En effet, la puissance est proportionnelle à la tension au carré. Ainsi, à résistance constante : $10\log_{10}(P_1/P_2) = 10\log_{10}(U_1^2/U_2^2) = 20\log_{10}(U_1/U_2)$.

Dans la suite de ce chapitre, ce sont des rapports de tension qui seront étudiés. **En résumé, le rapport G_V des tensions U_1 sur U_2 s'exprime en dB ainsi :**

$$\mathbf{G_{VdB} = 20\log_{10}(U_1/U_2)\ [dB].}$$

Quelques correspondances pour des gains en tension sont données dans le Tableau 1:

G_V	1/100	1/10	0,2	1/2	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	5	10	100
G_{VdB}	-40 dB	-20 dB	-14 dB	-6 dB	-3 dB	0 dB	3 dB	6 dB	14 dB	20 dB	40 dB

Tab.1 – Correspondance entre G_V et G_{VdB}.

L'utilisation de cette unité est particulièrement intéressante pour étudier des phénomènes où un paramètre varie de plusieurs ordres de grandeur : cela permet de manipuler des nombres « raisonnables ». Par exemple, pour un rapport variant de 10^{-2} à 10^6, l'équivalent en dB est compris entre -40 dB et 120 dB. De plus, il est fréquent en électronique que dans une chaîne de mesure des rapports de puissance ou de tension (gain) se multiplient :

circuit A : $G_A = U_2/U_1$, circuit B : $G_B = U_3/U_2$, circuit A suivi du circuit B : $G_T = U_3/U_1 = (U_3/U_2).(U_2/U_1) = G_AG_B$.

En exprimant les gains en dB, il suffit alors d'ajouter G_{AdB} et G_{BdB} pour trouver G_{TdB}. Notons enfin que tracer un rapport R sur une échelle logarithmique est équivalent à tracer ce rapport R en dB sur une échelle linéaire (cf. le double axe des ordonnées Fig.2). L'intérêt de l'échelle log sur l'échelle linéaire graduée en dB est l'absence de calcul logarithmique (avantage moins crucial depuis l'arrivée des calculatrices).

3. Différents types de filtres et leurs caractéristiques

a) Fonction de transfert

Etant donnée la fonction même d'un filtre, l'étude de celui-ci se fait généralement dans le domaine fréquentiel (cf. Chapitre I) : pour un signal d'entrée sinusoïdal donné, on étudie comment varie le signal de sortie. Pour cela, la fonction de transfert $H(j\omega)$ est utilisée : **H est le rapport de la tension complexe en sortie du filtre sur la tension complexe en entrée du filtre**. H est caractérisée par son module (appelé généralement le gain G, même pour $G < 1$) et son argument ϕ (déphasage du signal de sortie par rapport à celui d'entrée). L'étude fréquentielle faite, il est très simple alors de repasser au domaine temporel. Par exemple, pour un signal d'entrée $v_e = 2\sin(2\pi.10\,000t)$ [V] et pour $G(10\text{ kHz}) = 0,1$ et

ϕ(10 kHz)) = +90° (v_s en avance sur v_e) alors $v_s = 0{,}2\sin(2\pi.10\,000t + \pi/2)$ (l'amplitude est divisée par 10 et la sortie est déphasée de 90° par rapport à l'entrée).

Pour un signal d'entrée v_e périodique non-sinusoïdal et si le système est linéaire, il faut décomposer v_e en une somme de sinusoïdes (série de Fourier) et appliquer à chaque terme de la somme la fonction de transfert H. Par exemple, si $v_e = A\sin(\omega_1 t) + B\sin(\omega_2 t)$ alors $v_s = G(\omega_1)A\sin(\omega_1 t + \phi(\omega_1)) + G(\omega_2)B\sin(\omega_2 t + \phi(\omega_2))$. NB : pour les signaux non périodiques, il faut utiliser la transformée de Fourrier.

b) Représentation de la fonction de transfert sur un diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est un moyen synthétique et visuel de présenter les caractéristiques d'un filtre. Y sont représentées les variations en fréquence du module et de l'argument de la fonction de transfert d'un système. L'axe des abscisses est en échelle logarithmique, l'axe des ordonnées est linéaire pour l'argument (en degré ou en radian) et logarithmique pour le module (sans unité : rapport de tension). Notons que si le gain est en dB, alors l'échelle des ordonnées est linéaire (cf. Fig.2).

c) Différents types de filtres

L'allure des gains des trois principaux types de filtres que nous rencontrerons sont présentés Fig.2.

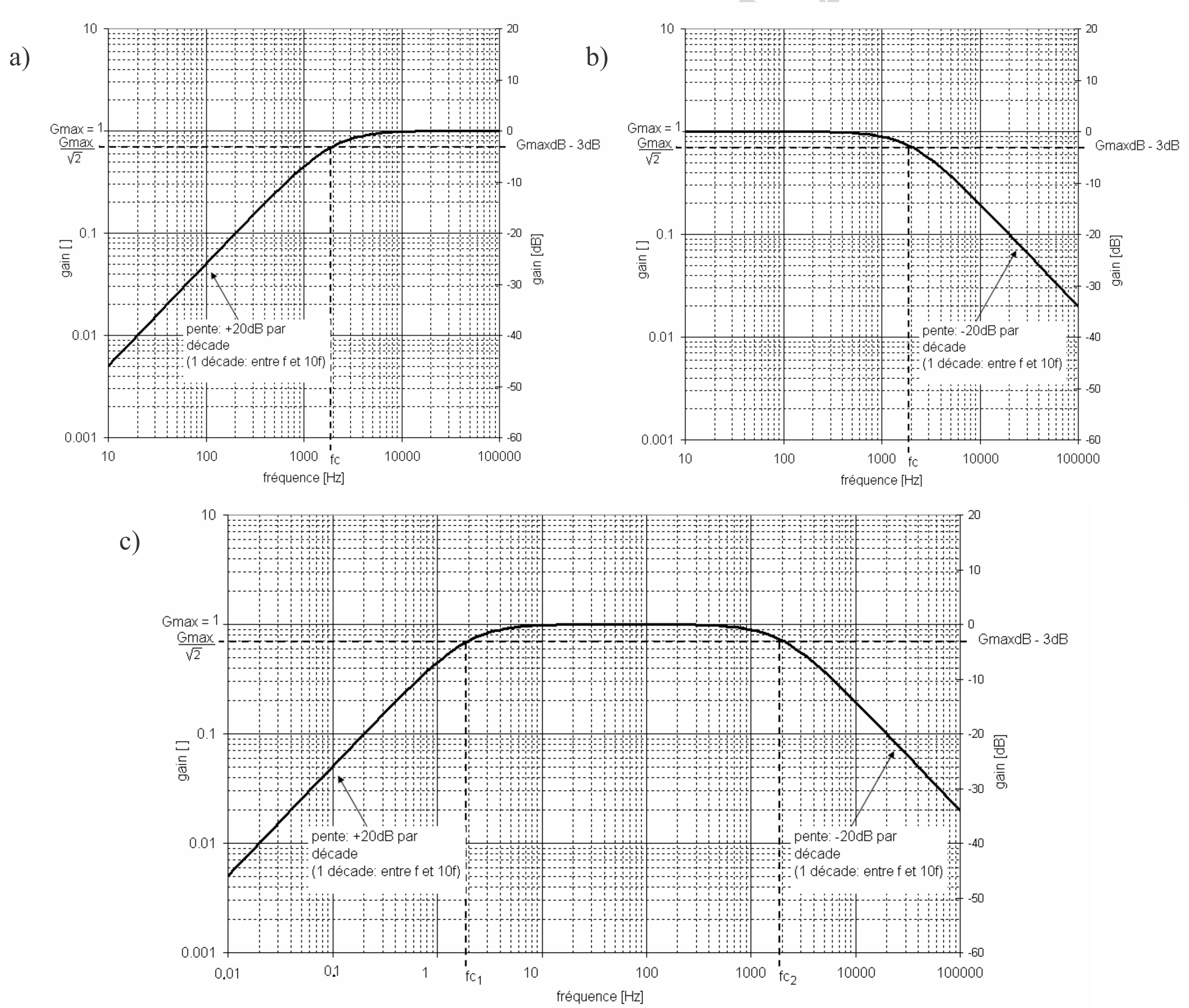


Fig.2 - Diagrammes de Bode (gain) de filtres a) passe-haut, b) passe-bas, c) passe-bande (large-bande)

f_c est la **fréquence de coupure à -3 dB** : par définition le gain est à cette fréquence égal au gain maximum divisé par $\sqrt{2}$ (i.e. $G(f_C) = G_{MAX}/\sqrt{2}$ ou encore $G_{dB}(f_C) = G_{MAXdB} - 3dB$ car $20\log_{10}(1/\sqrt{2}) \approx -3$). **La bande passante du filtre** est l'intervalle de fréquence dans lequel le gain est compris entre G_{MAXdB} et $G_{MAXdB} - 3$ dB : dans cette bande, les signaux de sortie sont peu atténués.

Le filtre passe-bas laisse passer les signaux d'entrée ayant une fréquence inférieure à f_c ($G(f < f_c/10) \approx 1$ et donc $|v_s| \approx |v_e|$, $G(f < f_c) > 0,7$) et bloque les autres signaux ($G(f > 10f_c) < 1/10$ et donc $|v_s| < |v_e|/10$, $G(f > f_c) < 0,7$). Le même raisonnement peut être tenu pour le filtre passe-haut.

Pour le filtre passe-bande, les signaux d'entrée ayant une fréquence comprise entre f_{c1} et f_{c2} sont peu atténués ($G > 0,7$), les autres sont atténués ($G < 0,7$). La fréquence où le gain est maximum est **la fréquence centrale** f_0 du filtre passe-bande. La bande-passante est comprise entre f_{c1} et f_{c2}.

La pente du gain est aussi un paramètre important : plus celle-ci est importante, meilleure sera la sélection de certaines fréquences. Par exemple, pour un filtre radio (filtre passe-bande : Fig.2c) : si on souhaite recevoir correctement la station émettant des ondes autour de 93,5 MHz, il faut non seulement que la fréquence centrale du filtre soit égale à 93,5 MHz ($G_{MAX} = G(93,5\text{ MHz})$) mais aussi que les signaux provenant des stations émettant à des fréquences proches (93,1 et 93,9 MHz) soient suffisamment atténués (par exemple $G(93,1\text{ MHz}) < G_{MAX}/10$) : il est donc nécessaire que les pentes soient suffisamment fortes.

Notons que connaissant le cahier des charges du filtre (fréquence centrale, bande-passante, atténuation dans la bande-passante et hors bande-passante, etc.), il existe des méthodes pour synthétiser un filtre.

4. Filtres passifs analogiques

Les filtres dits « passifs » n'utilisent que des composants passifs (c'est-à-dire à la fois un composant qui consomme de l'énergie et n'en produit pas et où il n'y a pas de gain en puissance) comme des résistances, des condensateurs et des bobines. Analogique, par opposition à numérique, se dit de signaux dont l'information est représentée par une grandeur physique (un courant, une tension, etc.), grandeur qui peut prendre une infinité de valeurs continues. Au contraire, en numérique, les valeurs sont discrètes.

Exemple d'un filtre du 1er ordre

Soit le circuit de la Fig.3. v_e est la tension d'entrée du circuit, v_s celle de sortie. Pour étudier la réponse en fréquence de ce circuit, nous cherchons l'expression de sa fonction de transfert H, v_e étant alors un signal sinusoïdal.

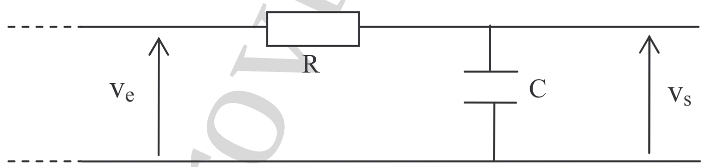


Fig.3 – Filtre passe-bas

Comme v_e est sinusoïdal, le condensateur de capacité C a une impédance équivalente $Z_C = 1/jC\omega$ où ω est la pulsation de v_e. En appliquant la formule du diviseur de tension :

$$v_s = v_e Z_C/(Z_C + R) \text{ soit } H = 1/(1 + j\tau\omega) \text{ avec } \tau = RC.$$

Notons que le filtre est dit du « 1er ordre » car dans l'expression de H, ω (ou f puisque $\omega = 2\pi f$) est à la puissance 1 (l'équation différentielle relative à ce circuit est du 1er ordre). Un filtre du 2ème ordre aurait une pente en $1/f^2$ ou en f^2 (équation différentielle du 2ème ordre).
Connaissant H, on peut alors pour un signal sinusoïdal en entrée trouver l'expression complexe du signal de sortie puis son expression dans le domaine temporel (cf. §3a). Généralement, il est intéressant de représenter H sur un diagramme de Bode, les caractéristiques principales y sont en effet résumées. Une étude asymptotique permet de simplifier le tracé de $G = |H| = 1/(1 + \tau^2\omega^2)^{1/2}$:

- Recherche de l'asymptote basse fréquence ($f \rightarrow 0$)
  Asy.BF = 1 (droite horizontale).

- Recherche de l'asymptote haute fréquence ($f \rightarrow \infty$)
  Asy.HF = $1/(2\pi\tau f)$ (poser que Asy.HF tend vers zéro n'aide pas au tracé sur le diagramme de Bode puisque l'échelle étant logarithmique, il n'y a pas de zéro).
  En échelle log-log c'est l'équation d'une droite puisque $\log(\text{Asy.HF}) = \log_{10}(1) - \log_{10}(2\pi\tau f) = -\log_{10}(2\pi\tau f)$. Il suffit donc pour tracer l'asymptote haute fréquence de trouver 2 de ses points ou un point et sa pente :
  Un point simple à placer est en $f = 1/2\pi\tau$ où Asy.HF = 1. La pente de l'asymptote est de -20 dB par décade, c'est-à-dire une chute d'un facteur 10 du gain quand la fréquence est multipliée par 10 (une décade : entre f et 10f). En effet :
  A f_1 Asy.HF(f_1) $\approx 1/(2\pi\tau f_1)$ et à $10f_1$ Asy.HF($10f_1$) $= 1/(2\pi\tau.10f_1)$ = Asy.HF(f_1)/10.
  En dB : $\text{Asy.HF}_{dB}(10f_1) = 20\log_{10}(\text{Asy.HF}(f_1)/10) = \text{Asy.HF}_{dB}(f_1) - 20$ dB et donc une chute de 20 dB par décade.

- Point d'intersection des 2 asymptotes
  Il faut résoudre Asy.BF(f) = Asy.HF(f). La solution est ici évidente : $f = 1/2\pi\tau$.

- Valeur de G au point d'intersection
  $G(1/2\pi\tau) = 1/\sqrt{2}$ ou encore $G_{dB}(1/2\pi\tau) = 20\log_{10}(1/\sqrt{2}) = -3$ dB.

La fréquence de coupure à -3 dB est déterminée en résolvant $G(f_C) = G_{MAX}/\sqrt{2}$ ou encore $G_{dB}(f_C) = G_{MAXdB} - 3$ dB. Ici, $G_{MAX} = 1$ ou $G_{MAXdB} = 0$ dB. Il faut donc résoudre : $1/(1 + (2\pi\tau f_C)^2)^{1/2} = 1/\sqrt{2} \rightarrow f_C = 1/2\pi\tau$ (c'est donc aussi dans cette exemple le point d'intersection des asymptotes). La bande passante de ce filtre est $[0 ; f_C]$ soit $[0 ; 1/2\pi\tau]$.

Pour le déphasage ϕ de v_s par rapport à v_e, il faut tracer l'argument de H :
$\phi = \text{Arg}(H) = \arg(1/(1 + j\tau\omega)) = \arg(1) - \arg(1 + j\tau\omega) = 0 - \text{arctg}(\tau\omega/1)$ en prenant la valeur d'arctg($\tau\omega$/1) comprise entre 0 et 90° puisque $1 > 0$ et $\tau\omega > 0$.
$\phi(0) = 0$, $\phi(f_C) = -45°$ et $\phi(f \rightarrow \infty) = -90°$.

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert de ce filtre est tracé en phase Fig.4 et en gain Fig.2b pour $f_C = 1/2\pi\tau = 2$ kHz.

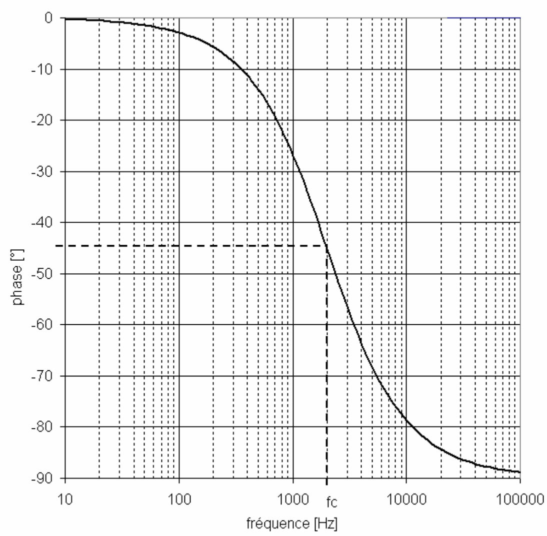
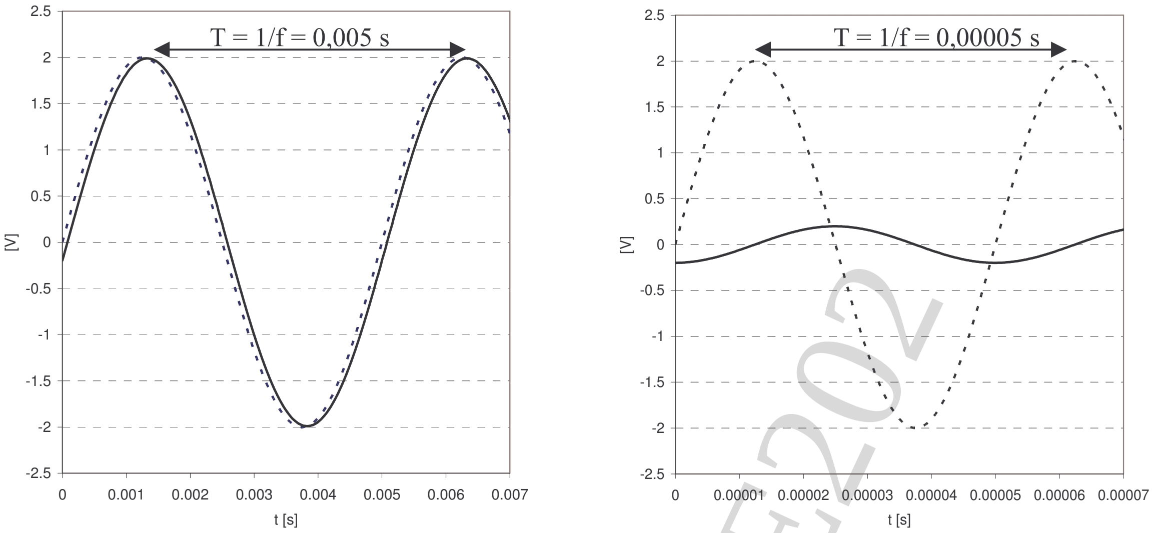


Fig.4 - Diagramme de Bode en phase du circuit de la Fig.3

En temporel, les tensions de sortie pour une tension d'entrée sinusoïdale de 4 V d'amplitude crête à crête ($v_e = A\sin(2\pi ft)$ [V] avec A = 2 V) sont données ci-dessous pour une fréquence de 200 Hz << f_c (Fig.5a) et pour une fréquence de 20 kHz >> f_c (Fig.5b) ($v_s = A|H(f)|\sin(2\pi ft+\phi(f))$.



(a) (b)

Fig.4 – Tension d'entrée (trait pointillé) et de sortie (trait plein) pour le filtre de la Fig.3
a) fréquence : 200 Hz, b) fréquence : 20 kHz

Le signal d'entrée à 200 Hz se retrouve quasiment inchangé en sortie alors que celui à 20 kHz est atténué d'un facteur 10 et en retard de 90° : le filtre laisse seulement passer les signaux ayant une fréquence très inférieure à la fréquence de coupure (2 kHz).

5. Filtres actifs analogiques et filtres numériques

Les filtres analogiques dits « actifs » utilisent des composants passifs et actifs (par exemple un AOP qui consomme de l'énergie continue pour amplifier un signal d'entrée par exemple sinusoïdal, cf. Ch.III). L'intérêt de ces filtres est entre autre d'ajouter à la fonction filtrage la fonction amplification dans le même circuit (cf. TD AOP, Partie 2).

Parmi les filtres autres qu'analogiques, il existe les filtres numériques : le signal à traiter est, s'il est analogique, préalablement transformé en un signal numérique grâce à un Convertisseur Analogique Numérique (CAN). Les avantages sont entre autre la miniaturisation et la souplesse lors de la synthèse du filtre où il s'agit de programmer et non de placer des composants : cela permet ainsi par exemple de changer plus facilement les caractéristiques du filtre (reprogrammation contre changement des valeurs de composants) et d'obtenir des caractéristiques hors de portée de l'analogique (filtre très sélectif par exemple). En micro-électronique, les filtres numériques sont très largement prépondérants.