Examen partiel du 18 novembre 2009

Durée de l'épreuve : 2h00. Sans document ni calculatrice.

Les deux parties sont indépendantes; les questions signalées par le symbole $\star$ sont indépendantes (au moins en partie). On pourra laisser les résultats numériques sous forme de fraction irréductible. Préciser impérativement les unités de tous les résultats numériques.

Les amplificateurs opérationnels sont supposés **parfaits**. Ils sont alimentés sous des tensions $\pm E = \pm 10$ **V** et saturent pour $V_{\text{sat}}^{\pm} = \pm E$. Quand on étudie le fonctionnement des montages en régime sinusoïdal permanent, on note avec une minuscule les fonctions sinusoïdales du temps et avec une majuscule les amplitudes complexes associées :

$$v_e(t) = \Re(V_e e^{j\omega t})$$

Éléments de correction

A Circuits de type PGA

Dans les montages des figures 1 et 2, les K_i figurent des interrupteurs avec la convention :
- $K_i = 1$ lorsque l'interrupteur est fermé (court-circuit);
- $K_i = 0$ lorsque l'interrupteur est ouvert (circuit-ouvert).

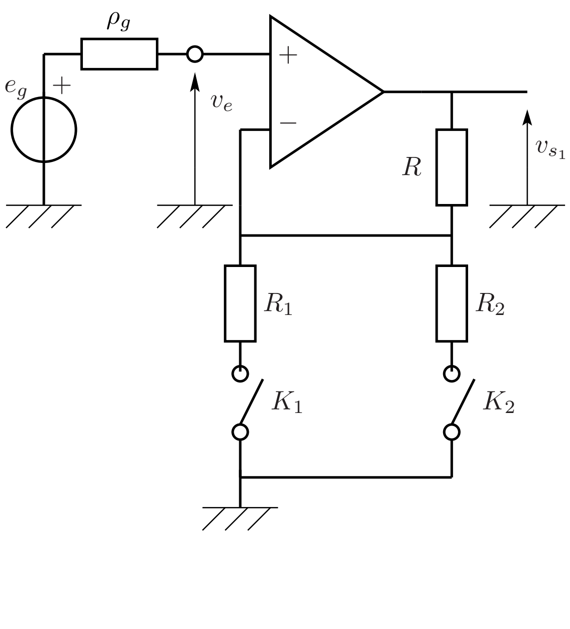

Fig. 1 Circuit PGA 1

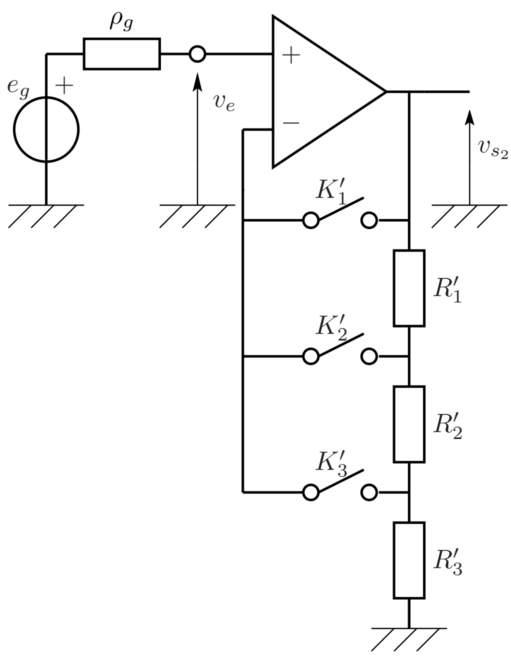

Fig. 2 Circuit PGA 2

A.I Étude du circuit PGA 1 (fig. 1)

$\star$ **Q 1 :** Déterminer pour chacune des 4 configurations des interrupteurs K_1 et K_2, la conductance équivalente Y à l'ensemble des R_i et K_i entre l'entrée inverseuse de l'AO et la masse. En déduire l'expression de Y en fonction des R_i et des variables K_1 et K_2 (vérifier cette expression en particulier dans le cas des deux interrupteurs ouverts $K_1 = K_2 = 0$).

Solution

$$Y = \frac{K_1}{R_1} + \frac{K_2}{R_2}$$

⋆ **Q 2 :** Montrer que l'AO peut fonctionner en régime linéaire (à condition que la tension d'entrée soit assez faible).

Solution

R assure la réaction négative.

$$\varepsilon = V_+ - V_- = V_e - \frac{1}{1+RY}V_s \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{dV_s} < 0$$

⋆ **Q 3 :** Donner l'expression du gain $G_1 = \frac{V_{s_1}}{V_e}$ en fonction de R et de Y.

Solution

$$V_+ = V_- \quad \Rightarrow \quad G_1 = 1 + RY = 1 + K_1\frac{R}{R_1} + K_2\frac{R}{R_2}$$

Q 4 : On donne $R = 10$ kΩ, $R_1 = 10$ kΩ et $R_2 = 5$ kΩ. Calculer les valeurs numériques du gain G_1 pour les $2^2 = 4$ combinaisons des états des interrupteurs.

Solution

K_2K_1	00	01	10	11
G_1	1	2	3	4

Q 5 : À combien doit-on limiter la tension d'entrée pour éviter toute saturation quelles que soient les positions des interrupteurs ?

Solution

C'est le cas $K_2K_1 = 11$, soit $G_=4$ le plus critique : $|V_e|_{\text{max}} = 10/4 = 2,5$ V.

A.II Étude du circuit PGA 2 (fig. 2)

Dans le circuit PGA 2 (fig.2) on suppose qu'il y a toujours un et un seul des interrupteurs K'_i en position fermée (3 cas).

⋆ **Q 6 :** Dans chacun de ces 3 cas, redessiner le schéma du montage en remplaçant R'_1, R'_2 et R'_3 par une ou deux (suivant le cas) résistances équivalentes dont on précisera l'expression.

Solution

ρ entre V_- et V_s, ρ' entre V_- et la masse.

inter. fermé	K'_1	K'_2	K'_3
ρ	0	R'_1	$R'_1 + R'_2$
ρ'	$R'_1 + R'_2 + R'_3$	$R'_2 + R'_3$	R'_3

⋆ **Q 7 :** Montrer que l'AO peut fonctionner en régime linéaire (à condition que la tension d'entrée soit assez faible).

Solution

$$V_+ - V_- = V_e - \frac{R'_1 + R'_2 + R'_3 - \rho}{R'_1 + R'_2 + R'_3}V_s \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varepsilon}{dV_s} < 0$$

La réaction négative est assurée par ρ.

⋆ **Q 8 :** Donner l'expression du gain $G_2 = \dfrac{V_{s_2}}{V_e}$ en fonction des résistances dans les 3 cas. On pourra s'appuyer sur les schémas de la question 6.

Solution

$$G_2 = \frac{R'_1 + R'_2 + R'_3}{R'_1 + R'_2 + R'_3 - \rho}$$

inter. fermé	K'_1	K'_2	K'_3
G_2	1	$1+\frac{R'_1}{R'_2+R'_3}$	$1+\frac{R'_1+R'_2}{R'_3}$

Q 9 : On donne $R'_1 = 20$ kΩ, $R'_2 = 10$ kΩ et $R'_3 = 10$ kΩ. Calculer les valeurs numériques du gain G_2 pour les 3 cas.

Solution

inter. fermé	K'_1	K'_2	K'_3
G_2	1	2	4

A.III Comparaison des deux circuits

⋆ **Q 10 :** PGA est un acronyme anglais qui signifie Programmable G..... A........ Compléter.

Solution

Programmable Gain Amplifier

Q 11 : Il est possible d'obtenir les 3 valeurs de gains du circuit PGA 2 avec le circuit PGA 1. Établir la correspondance entre les positions des 2 interrupteurs K_1 et K_2 du circuit PGA 1 et le numéro de l'interrupteur fermé K'_i du circuit PGA 2.

Solution

inter. fermé PGA 2	K'_1	K'_2	K'_3
K_2K_1 PGA 1	00	01	11

Q 12 : En pratique, les interrupteurs sont des dispositifs semi-conducteurs commandés par une tension ; ils restent parfaits en position ouverte, mais ils présentent une faible résistance résiduelle r en position fermée. Montrer que les gains de l'un des deux montages ne sont pas affectés par cette imperfection des interrupteurs.

Solution

Dans le montage PGA 1, il faut remplacer R_i par $R_i + r$, alors que dans le montage PGA 2, l'interrupteur est parcouru par le courant I_- qui est nul si l'AO est parfait. Ainsi le deuxième montage est insensible à cette imperfection des interrupteurs.

B Mesure de niveau par effet capacitif

B.I Principe du capteur capacitif de niveau

Pour mesurer le niveau dans une cuve d'un liquide de permittivité diélectrique relative ε_r, on insère une sonde capacitive dans le réservoir : partiellement immergée, la capacité constituée de deux armatures conductrices séparées par le liquide dans la partie basse et par l'air dans la partie haute dépend donc de la hauteur immergée. Pour simplifier, on étudie une capacité constituée de deux plans conducteurs parallèles[1] (fig. 3).

[1] Mais la sonde constituée de deux cylindres coaxiaux est plus compacte et moins sensible aux parasites et l'armature périphérique est parfois constituée du réservoir lui-même.

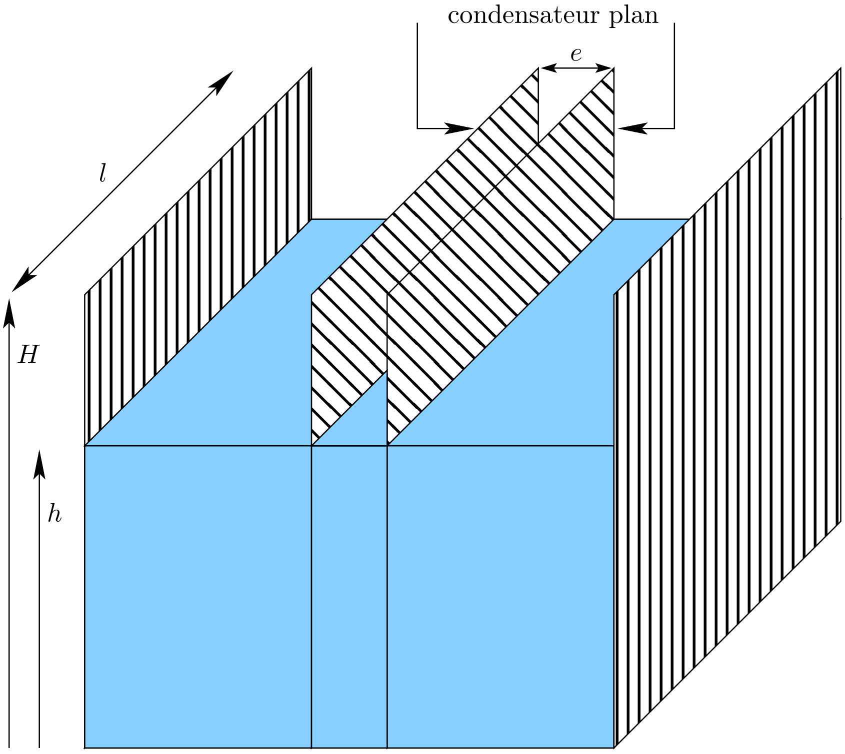

FIG. 3 Capteur capacitif de niveau à armatures planes parallèles.

En négligeant les effets de bord, on peut considérer que la capacité $C(h)$ de la sonde est constituée de l'association en parallèle de deux condensateurs plans, C_1 et C_2, le premier de hauteur h immergé dans le liquide de permittivité diélectrique $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, le second de hauteur $H - h$ dont le diélectrique est l'air de permittivité diélectrique ε_0.

⋆ **Q 13 :** De manière générale, quelle est la capacité C équivalente à C_1 et C_2 associées en parallèle ?

On rappelle que la capacité d'un condensateur à conducteurs plans parallèles et de même surface S séparés par une épaisseur e d'isolant de permittivité diélectrique ε s'exprime sous la forme :

$$C = \varepsilon \frac{S}{e} \tag{1}$$

⋆ **Q 14 :** Donner l'expression de la capacité équivalente $C(h)$ de la sonde. On note $C_0 = C(0)$ la capacité de la sonde quand le réservoir est vide ($h = 0$). Exprimer $C(h)$ en fonction de C_0, ε_r, h et H. Vérifier que la capacité $C(h)$ dépend linéairement du niveau h et déterminer la constante α (pour un liquide donné) telle que :

$$C(h) = C_0(1 + \alpha h). \tag{2}$$

Calculer C_0, $C(H)$ et α pour $l = 10$ cm, $H = 1$ m, $e = 1$ cm et $\varepsilon_r = 5$. On suppose $\varepsilon_0 \approx 10^{-11}$ F·m^{-1} pour simplifier. On conservera ces valeurs numériques par la suite.

Solution

$$C(h) = C_1 + C_2 = \frac{l}{e}\left[\varepsilon_0(H-h) + \varepsilon h\right] = \frac{l}{e}\varepsilon_0 H\left[1 + (\varepsilon_r - 1)h/H\right] = C_0\left[1 + (\varepsilon_r - 1)h/H\right]$$

$$C(h) = C_0(1 + \alpha h) \qquad \alpha = \frac{\varepsilon_r - 1}{H}$$

$C_0 = 10^{-10}$ F = 100 pF, $C(H) = 5 \cdot 10^{-10}$ F = 500 pF, et $\alpha = 4$ m^{-1}.

B.II Conditionneur à diviseur capacitif

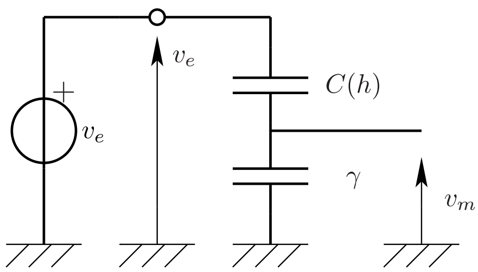

FIG. 4 Diviseur capacitif

Le condensateur $C(h)$ ainsi constitué est inséré dans le montage de la figure 4 où γ est une capacité fixe et la source de tension est sinusoïdale : $v_e(t) = V_e \cos \omega t$.

⋆ **Q 15 :** Déterminer la fonction de transfert $H_1(\omega) = \dfrac{V_m(\omega)}{V_e(\omega)}$ du circuit de la figure 4 en fonction de $C(h)$ et γ. On choisit $\gamma = C_0$. Démontrer en justifiant chaque étape que la fonction de transfert prend alors la forme suivante :

$$H_1 = \frac{1+\alpha h}{2+\alpha h} \tag{3}$$

On pourra admettre cette expression pour continuer.
Calculer H_1 dans le cas où la cuve est vide ($h = 0$), puis si elle est pleine ($h = H$).

Solution

$$H_1 = \frac{Z_\gamma}{Z_\gamma + Z_{C(h)}} = \frac{C(h)}{\gamma + C(h)} = \frac{C_0(1+\alpha h)}{\gamma + C_0(1+\alpha h)} = \frac{1+\alpha h}{2+\alpha h}$$

Si la cuve est vide $H_1 = 1/2$, si elle est pleine $H_1 = 5/6$.

⋆ **Q 16 :** On définit la sensibilité de la mesure de h comme $S_1 = \dfrac{dV_m}{dh}$, où V_m est l'amplitude de la tension $v_m(t)$. Donner l'expression de S_1 en fonction de V_e, α et h.

Solution

$$S_1 = V_e \frac{\alpha}{[2+\alpha h]^2}$$

Q 17 : On fixe $V_e = 5$ V. Calculer la sensibilité pour une cuve vide puis pour une cuve pleine.

Solution

$$S_1 = 5\ \mathrm{Vm^{-1}} \quad \text{à vide} \qquad S_1 = \frac{5}{9}\ \mathrm{Vm^{-1}} \quad \text{à plein}$$

B.III Conditionneur actif

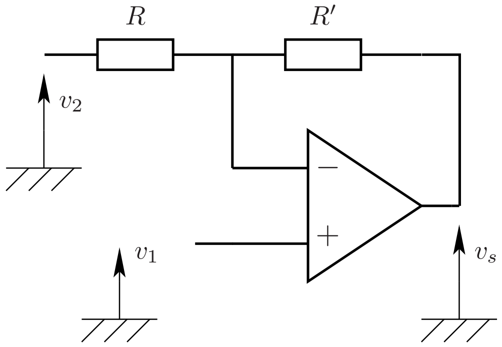

Fig. 5 Montage amplificateur

⋆ **Q 18 :** Dans le montage de la figure 5, montrer que l'amplificateur opérationnel est soumis à une réaction négative. En déduire l'expression de v_s en fonction de v_1 et v_2. Quelle est l'impédance d'entrée du montage sur l'entrée v_1 ?

Solution

$v_- = \dfrac{v_1/R' + v_s/R}{1/R + 1/R'}$ donc $\varepsilon = V_+ - v_-$ vérifie $\dfrac{d\varepsilon}{dv_s} < 0$. Comme l'AO est idéal, $\varepsilon = 0$ et $\dfrac{v_s - v_1}{R'} = \frac{v_1 - v_2}{R}$

donc $v_s = \left(1 + \dfrac{R'}{R}\right) v_1 - \dfrac{R'}{R} v_2$

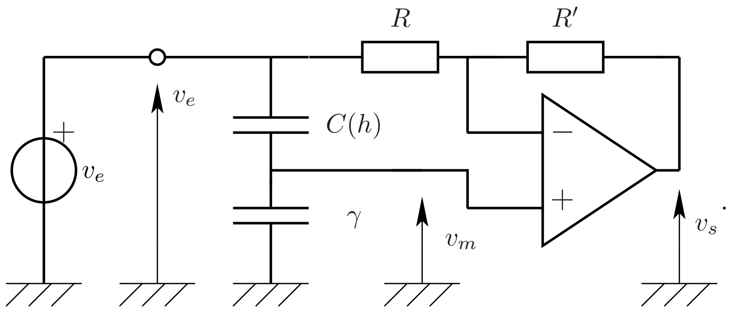

FIG. 6 Conditionneur actif

Q 19 : On admet que l'AO est en réaction négative. En utilisant les questions Q 15 et Q 18, déterminer la fonction de transfert $H_2 = V_s/V_e$ du conditionneur actif de la figure 6 en fonction de H_1 et des résistances, puis en fonction des résistances et des capacités. On reprend $\gamma = C_0$.

Solution

$$H_2 = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) H_1 - \frac{R'}{R} = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{1 + \alpha h}{2 + \alpha h} - \frac{R'}{R}$$

Q 20 : Comment choisir les résistances pour annuler la tension V_s lorsque la cuve est vide ? Quelle forme prend alors H_2 ? Vérifier que l'amplitude de la tension de sortie $v_s(t)$ ne sature pas l'AO quel que soit le niveau h. Calculer la nouvelle sensiblité de la chaîne $S_2 = \frac{dV_s}{dh}$ et donner ses valeurs pour la cuve vide et la cuve pleine.

Solution

$$R' = R \quad \Rightarrow \quad H_2 = \frac{\alpha h}{2 + \alpha h}$$

Quand la cuve est pleine, V_s est maximale et vaut 10/3 V, ce qui reste inférieur au seuil de saturation de 10 V.

$$S_2 = V_e \frac{2\alpha}{\left[2 + \alpha h\right]^2} = 2S_1$$

$$S_2 = 10 \text{ Vm}^{-1} \quad \text{à vide} \qquad S_2 = \frac{10}{9} \text{ Vm}^{-1} \quad \text{à plein}$$

Q 21 : Pour exploiter la mesure, il est nécessaire de placer une charge sur la sortie. Quel avantage présente le montage actif de la figure 6 par rapport au simple diviseur capacitif de la figure 4 ? Y-a-t'il d'autres avantages ?

Solution

Cette chaîne doit être complétée par un détecteur d'amplitude avec un redresseur qui va charger la sortie. Le premier intérêt du montage actif est qu'il masque cette charge au diviseur capacitif et présente une impédance de sortie nulle. Par ailleurs, il améliore la sensibilité d'un facteur deux.